Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Thomas Davi
Georg Jansing

16. Oktober 2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Einführung in die Optimierung – 1. Übungsblatt

Aufgabe 4:

Ein Waschmittelunternehmen erhält den Auftrag 42 Mengeneinheiten (ME) eines Waschmittels zu liefern. Dazu muss es mindestens 42 ME herstellen. Der Schadstoffausstoß beim gesamten Herstellungsprozess soll nicht mehr als 36 Schadstoffeinheiten (SE) betragen. Um den Auftrag zu erfüllen kann das Unternehmen auf zwei verschiedene Anlagen zurückgreifen:

In Anlage 1 werden stündlich 14 ME des Waschmittels hergestellt und 3 SE ausgestoßen. Die Kosten zum Betrieb von Anlage 1 betragen 16 Geldeinheiten (GE) pro Stunde.

In Anlage 2 werden stündlich 6 ME des Waschmittels hergestellt sowie 9 SE ausgestoßen. Die stündlichen Kosten betragen hier 4 GE.

Bestimmen Sie grafisch, wie viele Stunden die Anlagen 1 und 2 jeweils in Betrieb genommen werden, um den Auftrag mit minimalen Kosten zu erfüllen.

Aufgabe 5:

Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Standardform und lösen Sie das Programm grafisch.

(b) Bestimmen Sie alle Basislösungen rechnerisch und zeichnen Sie diese in der Grafik ein.

(c) Bestätigen Sie das Ergebnis aus (a) mit Hilfe des Optimalitätskriteriums.

(d) Betrachten Sie die Basis $(1, 2)$. Zeigen Sie, dass die Optimalitätsbedingungen für die zugehörige Basislösung nicht erfüllt sind und finden Sie eine bessere zulässige Basislösung mit Hilfe der Quotientenregel.

Aufgabe 6:

Das Optimalitätskriterium ist hinreichend, aber nicht notwendig für eine optimale Lösung. Entwickeln Sie ein Beispiel, das die Aussage bestätigt, d.h. finden Sie ein lineares Programm, dessen Optimallösung das Optimalitätskriterium nicht erfüllt.

b.w.

Aufgabe 7: (support vector machine)

Gegeben seien 100 rote Punkte $a^i \in \mathbb{R}^3$, $1 \le i \le 100$ und etwas entfernt davon liegend 100 schwarze Punkte $a^j \in \mathbb{R}^3$, $101 \le j \le 200$. Gesucht ist eine Hyperebene $\mathcal{H} := \{x \mid c^T x = \gamma\}$, die die roten Punkte möglichst gut von den schwarzen "trennt", und zwar in folgendem Sinn: Es gelte $c^T a^i \le \gamma - \alpha$ für $1 \le i \le 100$ und $c^T a^j \ge \gamma + \alpha$ für $101 \le j \le 200$. Ferner mögen für die Koeffizienten c_i von c die Ungleichungen $|c_i| \le 1$ gelten. Gesucht sind nun die Werte von c und γ, für die α möglichst groß wird.

Geben Sie ein lineares Programm an, das diese Aufgabe löst. Geben Sie dieses Programm in allgemeiner, Standard- oder $\le$-Form an, also bestimmen Sie die Zielfunktion, die Matrix A (bzw. die A_i) und den Vektor b (bzw die b_i) explizit.

Bemerkungen:

- Pro Aufgabe gibt es fünf Punkte.
- Bitte schreiben Sie auf jeden abgegebenen Übungszettel *lesbar* Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer. Die Abgabe der Zettel ist immer dienstags in der Vorlesung. Sie werden korrigiert in der jeweiligen Übungsgruppe zurückgegeben.
- Die Übungsblätter dürfen auch in Gruppen von zwei Personen abgegeben werden. Allerdings sollte jeder, der seinen Namen auf ein Übungsblatt setzt, die Aufgaben auch vorrechnen können.

Abgabe am Dienstag, den 23. Oktober, in der Vorlesung