Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN

15.06.2026

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 29:

(a) Implementieren Sie das implizite Eulerverfahren und die implizite Mittelpunktsregel (Aufgabe 14 (b)). Lösen Sie dabei das nichtlineare Gleichungssystem jeweils mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

(b) Wenden Sie sowohl das explizite als auch das implizite Eulerverfahren sowie die implizite Mittelpunktsregel auf das Räuber-Beute Modell

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = -2r(t) + r(t)b(t) \\ \dot{b}(t) = b(t) - r(t)b(t) \end{cases}$$

mit Startwerten $r(0) = 1$ und $b(0) = 1.5$ an. Verwenden Sie dazu eine relativ große Schrittweite und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.

Aufgabe 30:

Zeigen Sie, dass alle Nullstellen von $\rho(\zeta)$ eines stabilen, symmetrischen Mehrschrittverfahrens auf dem Einheitskreis liegen.

Hinweis: Nach Aufgabe 27 ist ein Mehrschrittverfahren symmetrisch, wenn $\alpha_{k-j} = -\alpha_j$ und $\beta_{k-j} = \beta_j$ für $j = 0, \ldots, k$ gilt. Zeigen Sie, dass daraus $\rho(\zeta) = -\zeta^k \rho(\zeta^{-1})$ folgt.

Aufgabe 31:

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz (4.10), dass ein MSV genau dann die Ordnung p hat, wenn

$$\frac{\rho(\zeta)}{\log(\zeta)} - \sigma(\zeta) = \mathcal{O}((1-\zeta)^p) \quad \text{für } \zeta \to 1.$$

(b) Es sei ρ vom Grad $\leq k$ mit $\rho(1) = 0$. Zeigen Sie mit (a): Es gibt genau ein Polynom σ vom Grad $\leq k$, so dass die Ordnung des zugehörigen Mehrschrittverfahrens mindestens $k+1$ ist.

Aufgabe 32:

Zeigen Sie: Ist

$$a_{s+1-i,s+1-j} + a_{ij} = b_j = b_{s+1-j}, \quad c_i + c_{s+1-i} = 1, \qquad i, j = 1, \ldots, s,$$

so ist das durch a_{ij}, b_i, c_i definierte, s-stufige Runge-Kutta-Verfahren symmetrisch. (Hinweis die Symmetrie von RKV ist in Aufgabe 14 definiert.)

Besprechung in der Übung am 22.06.2026.