Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN

08.06.2026

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 25:

Beweisen Sie die Dahlquist'sche Wurzelbedingung (Satz (4.14) der Vorlesung):

Ein Mehrschrittverfahren ist genau dann stabil (0-stabil), falls für die Nullstellen (Wurzeln) λ von ρ gilt:

$$|\lambda| \leq 1 \quad \text{und} \quad (|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \text{ ist einfache Nullstelle}).$$

Tipp: Sehen Sie sich Beispiel (4.12) oder den Beweis von Satz (4.20) an.

Aufgabe 26:

Approximiert man die Lösung eines Anfangswertproblems numerisch, so erhält man eine Folge y_n. Bei einer einfachen graphischen Darstellung der Lösung verwendet man einen Polygonzug, eine stückweise lineare Interpolation, wodurch die Lösung bei großen Schrittweiten etwas eckig aussehen kann.

Da man bei der Berechnung zusätzlich zu den y_n auch $f(t_n, y_n)$, also die Ableitung von y_n berechnet, bietet es sich an, stückweise ein Hermite-Interpolationspolynom zu berechnen, und damit die Funktion an zusätzlichen Punkten auszuwerten.

Hier ist der Versuch dieses Vorgehen mit Hilfe von ChatGPT als Pythonprogramm umzusetzen: https://chatgpt.com/share/6a1eca13-53b8-8328-a94c-b289cbdcba62

(a) Testen Sie anhand des harmonischen Oszillators, ob das erzeugte Programm funktioniert. Plotten Sie zu diesem Zweck die Lösung im Phasenraum (d. h. $y_1(t)$ gegen $y_2(t)$) mit einer konstanten Schrittweite $h = 1$.

(b) Ist die Hermite-Interpolation effizient?

Aufgabe 27:

Man nennt ein Mehrschrittverfahren symmetrisch, falls $\alpha_{k-i} = -\alpha_i$ und $\beta_{k-i} = \beta_i$ für $i = 0, 1, \ldots, k$ gilt. Zeigen Sie, dass die (maximale) Ordnung eines symmetrischen Mehrschrittverfahrens immer gerade ist.

Aufgabe 28:

Untersuchen Sie die folgenden linearen Mehrschrittverfahren auf Konvergenz und bestimmen Sie, falls konvergent, die Konvergenzordnung. Nehmen Sie jeweils an, dass die Startwerte passend gewählt werden.

(a) $y_{n+2} = \frac{1}{2} y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n + 2h f_{n+1}$

(b) $y_{n+1} = 2 y_n$

(c) $y_{n+4} = y_n + \frac{4}{3} h \left(f_{n+3} + f_{n+2} + f_{n+1} \right)$

(d) $y_{n+3} = -y_{n+2} + y_{n+1} + y_n + 2h \left(f_{n+2} + f_{n+1} \right)$

Besprechung in der Übung am 15.06.2026.