Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN

01.06.2026

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 21:

Es werde $f(t, y(t))$ durch das Interpolationspolynom p durch die Punkte

$$(t_{n-k+1}, f_{n-k+1}), \ldots, (t_n, f_n), \qquad f_j := f(t_j, y_j), \qquad t_j = t_0 + h \cdot j$$

interpoliert. Zeigen Sie mit Hilfe der Newton'schen Interpolationsformel die Darstellung

$$p(t) = p(t_n + \tau h) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-\tau}{j} \nabla^j f_n.$$

Hierbei sind Rückwärtsdifferenzen $\nabla^j f_n$ rekursiv definiert durch

$$\nabla^0 f_n = f_n, \qquad \nabla^{j+1} f_n = \nabla^j f_n - \nabla^j f_{n-1}$$

und der im oberen Argument kontinuierliche Binomialkoeffizient durch

$$\binom{\tau}{j} = \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (\tau - k).$$

Aufgabe 22:

(a) Zeigen Sie durch Induktion nach j (wobei $j \leq k$), dass für die Folge $z_k = \zeta^k$, $k = 0, 1, \ldots$ gilt:

$$\nabla^j z_k = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

(b) Zeigen Sie damit, dass für implizite Adams-Verfahren

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \quad \text{und} \quad \sigma(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

sowie für BDF-Verfahren, gegeben durch $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+k} = h f_{n+k}$,

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j \quad \text{und} \quad \sigma(\zeta) = \zeta^k$$

gilt.

b.w.

Aufgabe 23:

Zeigen Sie, dass das k-Schritt BDF-Verfahren die Ordnung $p = k$ hat.

Aufgabe 24:

Zeigen Sie, dass Runge-Kutta- und Mehrschrittverfahren invariant unter linearen Transformationen $y = Tz$ sind, d.h. wendet man das Verfahren auf $y' = f(t, y)$ und auf $z' = T^{-1}f(t, Tz)$ mit Anfangsbedingungen $y_0 = Tz_0$ (RKV) bzw. $y_j = Tz_j$, $j = 0, \ldots, k-1$ (MSV) an, so gilt $y_1 = Tz_1$ bzw. $y_k = Tz_k$.

Besprechung in der Übung am 08.06.2026.