Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN

04.05.2026

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 13:

Zeigen Sie Lemma (3.12): Für ein explizites s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Ordnung p gilt, dass $p \leq s$.

Hinweis: Betrachten Sie die einfache Testgleichung $\dot{y}(t) = y(t);\; y(0) = 1$.

Aufgabe 14:

Jedes Runge-Kutta-Verfahren kann in der Form

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

mit einer geeigneten Funktion Φ geschrieben werden. Gilt auch

$$y_n = y_{n+1} - h\Phi(t_n + h, y_{n+1}, -h),$$

(ein Schritt mit Schrittweite $-h$ führt zu y_n zurück), so heißt das Verfahren symmetrisch.

Zeigen Sie:

(a) Das Eulerverfahren $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$ ist nicht symmetrisch.

(b) Die implizite Mittelpunktsregel $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$ ist symmetrisch. Überlegen Sie sich auch, wie das Butcher-Tableau dieser Regel aussieht.

Aufgabe 15: (Wiederholung aus Numerik I)

Betrachten Sie die Integralgleichung

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+h} \lambda y(\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Die Approximation des Integrals in (1) mittels folgender Rechtecksregel liefert

$$\int_t^{t+h} \lambda y(\tau)\, d\tau \approx h\lambda y(t).$$

Damit ergibt sich aus (1) das explizite Euler-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n,$$

angewendet auf die Differentialgleichung $y'(t) = \lambda y(t)$.

(a) Welcher Quadraturformel entspricht das implizite Euler-Verfahren $y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1}$?

(b) Wie lautet die Iterationsvorschrift, wenn das Integral in (1) durch die Trapezregel ersetzt wird?

Besprechung in der Übung am 11.05.2026.