Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN

27.04.2026

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9:

Schreiben Sie eine Funktion `DreiachtelRegel(f, tspan, yinit, N)` (in PYTHON oder MATLAB) , welche die 3/8-Regel zur Lösung von

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

implementiert. Hierbei ist `f` die Funktion $f(t, y)$, `tspan=[`t_0, t_N`]`, `yinit` $= y_0$ und `N` die Anzahl der Schritte.
Testen Sie Ihre Funktion an

$$f(y) = \lambda y, \quad y(0) = 1, \quad t_N = 2, \quad \mathtt{N} = 20, \quad \text{jeweils für } \lambda = -1, 0, 1, 2.$$

Plotten Sie hierzu die Lösungen zu $t_0, t_1, \ldots, t_N$ zusammen mit den Lösungen des *expliziten Eulers* und mit den exakten Lösungen. Den Quelltext des *expliziten Eulers* finden Sie zur Inspiration auf der Vorlesungsseite.

Aufgabe 10:

Geben Sie das Butcher Tableau zum Verfahren von Heun an. Ein Schritt des Verfahrens ist durch

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4}\Big(f(t_0, y_0) + 3f\Big(t_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}hf\big(t_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{h}{3}f(t_0, y_0)\big)\Big)\Big)$$

gegeben.

Aufgabe 11:

Zeigen Sie, dass ein explizites Runge-Kutta-Verfahren konsistent ist, falls $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$ gilt.

Aufgabe 12:

Beweisen Sie: Falls die rechte Seite $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ einer autonomen Differentialgleichung $\dot{y} = f(y)$ eine globale Lipschitzbedingung erfüllt, d.h. falls

$$\|f(x) - f(z)\| \leq L\|x - z\| \quad \forall x, z \in \Omega$$

gilt, so genügt der numerische Fluß eines expliziten Runge-Kutta-Verfahrens der Lipschitzbedingung

$$\|\Psi^h(x) - \Psi^h(z)\| \leq \exp(hcL)\|x - z\| \quad \forall x, z \in \Omega,$$

wobei die Konstante c nur vom Runge-Kutta-Verfahren abhängt.

Hinweis: Für die Koeffizienten a_{ij} des Runge-Kutta-Verfahrens kann man $\tilde{c} := \max_{i,j} |a_{ij}|$ definieren und zeigen, dass für die inneren Stufen X_i und Z_i die Abschätzung $\|X_i - Z_i\| \leq (1 + \tilde{c}Lh)^{i-1}\|x - z\|$ gilt.

Besprechung in der Übung am 04.05.2026.