Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5:

Die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion ist das klassische Beispiel für einen homogenen chemischen Oszillator. Sie dient häufig zur Veranschaulichung chaotischer Systeme. Es handelt sich um ein System mehrerer gekoppelter chemischer Reaktionen.

Informieren Sie sich über die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion und stellen Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen im Format aus Aufgabe 1 auf, das sich dabei ergibt.

Hinweis: Als Quelle ist hier Wikipedia ausreichend. Nehmen Sie an, dass die Konzentrationen von Wasserstoff und Wasser zeitlich konstant sind.

Aufgabe 6:

Zeigen Sie: Ist $y : t \mapsto y(t)$ Lösung des AWPs

$$\dot{y} = f(y); \quad y(t_0) = y_0,$$

so ist $y_\tau : t \mapsto y(t - \tau)$ eine Lösung des AWPs

$$\dot{y} = f(y); \quad y(t_0 + \tau) = y_0.$$

Hinweis: Das bedeutet, dass bei autonomen Anfangswertproblemen der Wert t_0 keine Rolle spielt. Ohne Einschränkung können wir also die Anfangszeit t_0 auf 0 setzen.

Aufgabe 7:

Beweisen Sie Lemma (2.23) der Vorlesung: Für die intervallweise Kondition

$$\kappa[t_0, t] := \max_{s \in [t_0, t]} \|W(s, t_0)\|$$

mit einer von einer Vektornorm induzierten Matrixnorm $\|.\|$ gilt

(i) $\kappa[t_0, t_0] = 1$,

(ii) $\kappa[t_0, t_1] \geq 1$,

(iii) $\kappa[t_0, t_1] \leq \kappa[t_0, t_2]$ für $t_1 \leq t_2$,

(iv) $\kappa[t_0, t_2] \leq \kappa[t_0, t_1]\kappa[t_1, t_2]$ für $t_1 \in [t_0, t_2]$.

Aufgabe 8: (Wiederholung aus Numerik 1)

Konstruieren Sie folgende s-stufige Quadraturformeln mit Knoten c_i und Gewichten b_i, $i = 1, \ldots, s$, für das Intervall $[0, 1]$ und geben Sie jeweils die Ordnung an:

(a) eine zweistufige Quadraturformel maximaler Ordnung mit $c_1 = 0$,

(b) eine zweistufige Quadraturformel maximaler Ordnung mit $c_2 = 1$,

(c) eine zweistufige, symmetrische Quadraturformel maximaler Ordnung, und

(d) eine dreistufige Quadraturformel maximaler Ordnung mit den Knoten $c_1 = 0$, $c_3 = 1$ und Gewichtsfunktion $\omega(t) = {}^1\!/\!\sqrt{t}$.

Besprechung in der Übung am 27.04.2026.