

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 39:

Zeigen Sie, dass die Zweischrittverfahren aus Aufgabe 36

- (a) 0-stabil sind, genau dann, wenn $\alpha \geq 1/2$;
- (b) A -stabil sind, genau dann, wenn $\alpha \geq 1/2$ und $\beta > \alpha/2$.

Hinweis zu (b): Es ist

$$\frac{\sigma(\zeta)}{\rho(\zeta)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\zeta - 1}{\alpha(\zeta - 1) + 1}.$$

Aufgabe 40:

Berechnen Sie die Koeffizienten des impliziten Runge-Kutta-Verfahrens der Ordnung 4, das äquivalent zum Kollokationsverfahren mit Kollokationspunkten an den Gauß-Knoten $c_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{6}$ ist.

Aufgabe 41:

Für $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$ ist das Kronecker-Produkt definiert durch

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mp \times nq}.$$

Zeigen Sie für $A, E \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $C \in \mathbb{C}^{n \times k}$ und $D \in \mathbb{C}^{q \times r}$ folgende Rechenregeln:

- (a) $\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$
- (b) $(A + E) \otimes B = A \otimes B + E \otimes B$
- (c) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
- (d) Für $m = n$, $p = q$ und A, B nicht singulär ist $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.
Hinweis: Verwenden Sie (c).
- (e) Für $m = n$, $p = q$ sei x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und y ein Eigenvektor von B zum Eigenwert μ . Zeigen Sie, dass $x \otimes y$ ein Eigenvektor von $A \otimes B$ zum Eigenwert $\lambda\mu$ ist.

Besprechung in der Übung am 13.07.2026.