

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 36:

Zeigen Sie, dass alle irreduziblen Zweischrittverfahren der Ordnung 2 durch

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)(\alpha(\zeta - 1) + 1), \quad \sigma(\zeta) = (\zeta - 1)^2\beta + (\zeta - 1)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + 1$$

mit geeigneten Koeffizienten α, β , wobei $\alpha \neq 2\beta$, gegeben sind.

Hinweis: Für Verfahren mit Ordnung 2 gilt $\rho(e^h) - h\sigma(e^h) = \mathcal{O}(h^3)$ für $h \rightarrow 0$ (Taylor-Entwicklung von e^h).

Bei Mehrschrittverfahren kommt es nicht auf die Skalierung der Polynome an, obige sind nicht wie in der Vorlesung skaliert.

Zur Definition: Ein Verfahren ist irreduzibel, wenn $\text{ggT}(\sigma, \rho) = 1$, d.h. wenn σ und ρ keine gemeinsamen Wurzeln besitzen. Diese Definition gilt sowohl für explizite als auch implizite Verfahren.

Aufgabe 37:

Aus Aufgabe 22 wissen Sie, dass für BDF-Verfahren mit äquidistantem Gitter gilt:

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

- (a) Zeigen Sie unter Verwendung der Transformation $\zeta = \frac{1}{1-z}$, dass BDF-Verfahren genau dann (Null-)stabil sind, wenn für die Nullstellen μ von

$$p(z) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} z^j \tag{*}$$

gilt

$$|\mu - 1| \geq 1 \quad \text{und} \quad (|\mu - 1| = 1 \Rightarrow \mu \text{ ist einfache Nullstelle}).$$

- (b) Berechnen Sie die Nullstellen von (*) für $k = 1, \dots, 7$ numerisch und zeigen Sie so, dass BDF-Verfahren bis zur Ordnung 6 stabil, für $k = 7$ aber instabil sind.

Aufgabe 38:

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vollziehen Sie an diesem Beispiel die Aussage des oberen Diagramms aus Bemerkung (5.5)(iii) der Vorlesung nach: Finden Sie eine Transformationsmatrix T so, dass $T^{-1}AT = \Lambda$ mit Λ diagonal gilt. Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = Ay$ exakt, und geben Sie die Lösungsvorschriften sowohl des expliziten als auch des impliziten Eulerverfahrens an. Wenden Sie dann die Transformation $z = T^{-1}y$ auf die numerischen Löser an.

Leiten Sie andererseits die Vorschrift der beiden Eulerverfahren für die transformierte DGL $z' = \Lambda z$ her und vergleichen Sie die dabei entstandenen Verfahren (vgl. Aufgabe 24).