Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN

14.04.2026

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Bringen Sie die Beispiele 2,3,4 und 5 aus der ersten Vorlesung in die Form

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$

Definieren Sie hierzu für $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ und ein jeweils geeignetes n die passende Funktion f.

Aufgabe 2:

Geben Sie je ein Beispiel für eine Differentialgleichung an, die

(a) eine eindeutige Lösung für $t \in \mathbb{R}^+$,

(b) eine eindeutige Lösung nur für ein endliches Zeitintervall,

(c) mehrere Lösungen hat.

Begründen/ beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 3:

Thomas-Fermi-Problem (Gleichung (5.6) in DOI: `https://doi.org/10.1103/RevModPhys.63.151`):
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\varphi''(x) = \frac{\varphi(x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}, \quad \varphi(0) = \varphi_0 > 0, \quad \varphi'(0) = v_0.$$

(a) Transformieren Sie die Gleichung auf ein System erster Ordnung durch die Einführung von $v := \varphi'$.

(b) Warum ist der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar?

(c) Beweisen Sie die Eindeutigkeit von Lösungen in $C^2((0, X]) \cap C^1([0, X])$ mit Hilfe der folgenden allgemeineren Version des Gronwall Lemmas (vgl. (2.8)):

> Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $u, \beta : I \to \mathbb{R}$ stetige nichtnegative Funktionen, so dass für $\alpha \geq 0$, $t_0 \in I$ und alle $t_0 \leq t \in I$ gilt
> $$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} \beta(s) u(s) \, \mathrm{d}s.$$
> Dann folgt
> $$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s) \, \mathrm{d}s \right).$$

(d) Transformieren Sie die Gleichung nichtlinear auf ein System erster Ordnung, so dass der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar ist. (Hinweis: $\psi(y) := \varphi(y^2)$; $w(y) = \frac{1}{y}\psi'(y)$).

b.w.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass eine s-stufige Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ mit Stützstellen/Knoten c_i und Gewichten b_i für $[0, 1]$ alle Polynome bis Grad kleiner gleich $p - 1$ exakt integriert genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q} \quad \forall q \in \{1, \dots, p\} \tag{*}$$

Hinweis:: Gleichungen (*) werden als Ordnungsbedingungen der Quadraturformel bezeichnet. Wir werden sagen: Eine Quadraturformel, die (*) erfüllt, hat Ordnung p.

Besprechung in der Übung am 20.04.2026.