

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 21:

Zeigen Sie: Ist

$$a_{s+1-i, s+1-j} + a_{ij} = b_j = b_{s+1-j}, \quad c_i + c_{s+1-i} = 1, \quad i, j = 1, \dots, s,$$

so ist das durch a_{ij}, b_i, c_i definierte, s -stufige Runge-Kutta-Verfahren symmetrisch.

Aufgabe 22:

Zeigen Sie, dass das k -Schritt BDF-Verfahren die Ordnung $p = k$ hat.

Aufgabe 23:

- (a) Zeigen Sie durch Induktion nach j (wobei $j \leq k$), dass für die Folge $z_k = \zeta^k$, $k = 0, 1, \dots$ gilt:

$$\nabla^j z_k = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

- (b) Zeigen Sie damit, dass für implizite Adams-Verfahren

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \quad \text{und} \quad \sigma(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=0}^k \gamma_j^* \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

sowie für BDF-Verfahren, gegeben durch $\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+k} = h f_{n+k}$,

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j \quad \text{und} \quad \sigma(\zeta) = \zeta^k$$

gilt.

Aufgabe 24:

Beweisen Sie die Dahlquist'sche Wurzelbedingung (Satz (4.14) der Vorlesung):

Ein Mehrschrittverfahren ist genau dann stabil (0-stabil), falls für die Nullstellen (Wurzeln) λ von ρ gilt:

$$|\lambda| \leq 1 \quad \text{und} \quad (|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \text{ ist einfache Nullstelle}).$$

Tipp: Sehen Sie sich Beispiel (4.12) oder den Beweis von Satz (4.20) an.

Aufgabe 25:

Approximiert man die Lösung eines Anfangswertproblems numerisch, so erhält man eine Folge y_n . Bei einer einfachen graphischen Darstellung der Lösung verwendet man einen Polygonzug, eine stückweise lineare Interpolation, wodurch die Lösung bei großen Schrittweiten etwas eckig aussehen kann.

Da man bei der Berechnung zusätzlich zu den y_n auch $f(t_n, y_n)$, also die Ableitung von y_n berechnet, bietet es sich an, stückweise ein Hermite-Interpolationspolynom zu berechnen, und damit die Funktion an zusätzlichen Punkten auszuwerten.

Hier ist der Versuch dieses Vorgehen mit Hilfe von ChatGPT als Pythonprogramm umzusetzen:
<https://chatgpt.com/share/768d728d-5e63-41bc-a0cd-5472dd033154>

- (a) Testen Sie ob das erzeugte Programm funktioniert.
- (b) Ist die Hermite-Interpolation effizient?