Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN

08.04.2024

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 13:

Beweisen Sie: Falls die rechte Seite $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ einer autonomen Differentialgleichung $\dot{y} = f(y)$ eine globale Lipschitzbedingung erfüllt, d.h. falls

$$\|f(x) - f(z)\| \leq L\|x - z\| \quad \forall x, z \in \Omega$$

gilt, so genügt der numerische Fluß eines expliziten Runge-Kutta-Verfahrens der Lipschitzbedingung

$$\|\Psi^h(x) - \Psi^h(z)\| \leq \exp(hcL)\|x - z\| \quad \forall x, z \in \Omega,$$

wobei die Konstante c nur vom Runge-Kutta-Verfahren abhängt.

Aufgabe 14:

Zeigen Sie Lemma (3.13): Für ein explizites s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Ordnung p gilt, dass $p \leq s$.

Hinweis: Betrachten Sie die einfache Testgleichung $\dot{y}(t) = y(t);\ y(0) = 1$.

Aufgabe 15:

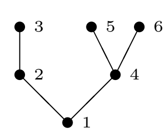
Schreiben Sie alle Ordnungsbedingungen für Runge-Kutta-Verfahren bis zur Ordnung 5 auf (in (3.20) sind bereits alle Bedingungen für Ordnung 4 angegeben) und ergänzen Sie so die Tabelle (3.22) aus der Vorlesung.

Aufgabe 16:

Überlegen Sie sich, dass es für jeden Baum $\tau \in \mathcal{T}$ ein System erster Ordnung $y' = f(y)$ mit $f : \mathbb{R}^{|\tau|} \to \mathbb{R}^{|\tau|}$ und Anfangswert $y_0 = 0$ gibt, so dass für die erste Komponente F^1 des elementaren Differentials gilt:

$$F^1(\tau)(y_0) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad F^1(\widetilde{\tau})(y_0) = 0 \qquad \text{für alle } \widetilde{\tau} \in \mathcal{T},\ \widetilde{\tau} \neq \tau$$

Hinweis: Zu dem Baum



gehört das System

$$(y^1)' = y^2 y^4, \quad (y^2)' = y^3, \quad (y^3)' = 1, \quad (y^4)' = y^5 y^6, \quad (y^5)' = 1, \quad (y^6)' = 1.$$

Besprechung in der Übung am 15.05.2024.