Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MELINDA HAGEDORN

10.04.2024

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Bringen Sie die Beispiele 2,4,5 und 6 aus der ersten Vorlesung in die Form

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} .$$

Definieren Sie hierzu für $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ und ein jeweils geeignetes n die passende Funktion f.

Aufgabe 2:

Geben Sie je ein Beispiel für eine Differentialgleichung an, die

(a) eine eindeutige Lösung für $t \in \mathbb{R}^+$,

(b) eine eindeutige Lösung nur für ein endliches Zeitintervall,

(c) mehrere Lösungen hat.

Begründen/ beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 3:

Thomas-Fermi-Problem (Gleichung (5.6) in DOI: `https://doi.org/10.1103/RevModPhys.63.151`): Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\varphi''(x) = \frac{\varphi(x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}, \quad \varphi(0) = \varphi_0 > 0, \quad \varphi'(0) = v_0.$$

(a) Transformieren Sie die Gleichung auf ein System erster Ordnung durch die Einführung von $v := \varphi'$.

(b) Warum ist der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar?

(c) Beweisen Sie die Eindeutigkeit von Lösungen in $C^2((0, X]) \cap C^1([0, X])$ mit Hilfe der folgenden allgemeineren Version des Gronwall Lemmas (vgl. (2.8)):

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $u, \beta : I \to \mathbb{R}$ stetige nichtnegative Funktionen, so dass für $\alpha \geq 0,\ t_0 \in I$ und alle $t_0 \leq t \in I$ gilt

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} \beta(s) u(s) \, \mathrm{d}s.$$

Dann folgt

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s) \, \mathrm{d}s \right).$$

(d) Transformieren Sie die Gleichung nichtlinear auf ein System erster Ordnung, so dass der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar ist. (Hinweis: $\psi(y) := \varphi(y^2);\ w(y) = \frac{1}{y}\psi'(y)$).

b.w.

Aufgabe 4:

Asterix und Obelix erhalten Besuch von Diffgleichnix und gehen in einer Ebene auf Wildschweinjagd. Da erspähen sie in 5 km Entfernung einen Römer. Plötzlich zieht Nebel auf. Der Römer rennt kopflos (geradlinig) davon. Obelix nimmt Diffgleichnix auf den Rücken und läuft viermal so schnell wie der Römer auf den Punkt zu, wo dieser gesichtet wurde. Nachdem Obelix 4 km zurückgelegt hat, hat Diffgleichnix berechnet, wie sie nun laufen müssen, um den Römer sicher zu treffen.

(a) Diffgleichnix hat die Ebene mit Hilfe von Polarkoordinaten (r, φ) beschrieben und dabei folgende Gleichung für die Kurve, die den einzuschlagenden Weg beschreibt, gefunden:

$$4(r(\varphi) - 1) = \int_0^{\varphi} (r(\vartheta)^2 + r'(\vartheta)^2)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\vartheta$$

Wie ist er darauf gekommen?

(b) Bestimmen Sie aus obiger Formel die Bahnkurve, der Asterix und Obelix nun folgen, um sicher auf den Römer zu treffen.

Besprechung in der Übung am 17.04.2024.