

## Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

### Aufgabe 31:

Bestimmen Sie den Stabilitätsbereich der Trapezregel

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f_{n+1} + f_n)$$

und skizzieren Sie ihn in der komplexen Ebene.

### Aufgabe 32:

Gegeben sei die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vollziehen Sie an diesem Beispiel die Aussage des oberen Diagramms aus Bemerkung (5.5)(iii) der Vorlesung nach: Finden Sie eine Transformationsmatrix  $T$  so, dass  $T^{-1}AT = \Lambda$  mit  $\Lambda$  diagonal gilt. Lösen Sie die Differentialgleichung  $y' = Ay$  exakt, und geben Sie die Lösungsvorschriften sowohl des expliziten als auch des impliziten Eulerverfahrens an. Wenden Sie dann die Transformation  $z = T^{-1}y$  auf die numerischen Löser an.

Leiten Sie andererseits die Vorschrift der beiden Eulerverfahren für die transformierte DGL  $z' = \Lambda z$  her und vergleichen Sie die dabei entstandenen Verfahren (vgl. Aufgabe 23).

### Aufgabe 33:

Beweisen Sie Satz 3 aus (5.7):

Ist  $\text{ggT}(\rho, \sigma) = 1$  und ist  $\sigma(\zeta) = 0$  für ein  $\zeta$  mit  $|\zeta| > 1$ , so ist  $\mathcal{S}$  beschränkt.

### Aufgabe 34:

Zeigen Sie, dass alle irreduziblen Zweischrittverfahren der Ordnung 2 durch

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)(\alpha(\zeta - 1) + 1), \quad \sigma(\zeta) = (\zeta - 1)^2\beta + (\zeta - 1)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + 1$$

mit geeigneten Koeffizienten  $\alpha, \beta$ , wobei  $\alpha \neq 2\beta$ , gegeben sind.

**Hinweis:** Für Verfahren mit Ordnung 2 gilt  $\rho(e^h) - h\sigma(e^h) = \mathcal{O}(h^3)$ ,  $h \rightarrow 0$  (Taylor-Entwicklung von  $e^h$ ).

Bei Mehrschrittverfahren kommt es nicht auf die Skalierung der Polynome an, obige sind nicht wie in der Vorlesung skaliert.

**Zur Definition:** Ein Verfahren ist irreduzibel, wenn  $\text{ggT}(\sigma, \rho) = 1$ , d.h. wenn  $\sigma$  und  $\rho$  keine gemeinsamen Wurzeln besitzen. Diese Definition gilt sowohl für explizite als auch implizite Verfahren.

**Abgabe der Übungsaufgaben bis Mittwoch, 24.06.2020, 9:00 Uhr über ILIAS.  
Besprechung in der Übung am selben Tag.**