Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

29.04.2020

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5:

Zeigen Sie: Ist $y : t \mapsto y(t)$ Lösung des AWPs

$$\dot{y} = f(y); \quad y(t_0) = y_0,$$

so ist $y_\tau : t \mapsto y(t - \tau)$ eine Lösung des AWPs

$$\dot{y} = f(y); \quad y(t_0 + \tau) = y_0.$$

Hinweis: Das bedeutet, dass bei autonomen Anfangeswertproblemen der Wert t_0 keine Rolle spielt. Ohne Einschränkung können wir also die Anfangszeit t_0 auf 0 setzen.

Aufgabe 6:

Beweisen Sie Lemma (2.21) der Vorlesung: Für die intervallweise Kondition

$$\kappa[t_0, t] := \max_{s \in [t_0, t]} \|W(s, t_0)\|$$

mit einer von einer Vektornorm induzierten Matrixnorm $\|.\|$ gilt:

(i) $\kappa[t_0, t_0] = 1$,

(ii) $\kappa[t_0, t_1] \geq 1$,

(iii) $\kappa[t_0, t_1] \leq \kappa[t_0, t_2]$ für $t_1 \leq t_2$,

(iv) $\kappa[t_0, t_2] \leq \kappa[t_0, t_1]\kappa[t_1, t_2]$ für $t_1 \in [t_0, t_2]$.

Aufgabe 7:

Konstruieren Sie folgende Quadraturformeln mit Knoten c_i und Gewichten b_i, $i = 1, \dots,$ für das Intervall $[0, 1]$ und geben Sie jeweils die Ordnung an:

(a) eine zweistufige Quadraturformel maximaler Ordnung mit $c_1 = 0$,

(b) eine zweistufige Quadraturformel maximaler Ordnung mit $c_2 = 1$,

(c) eine zweistufige, symmetrische Quadraturformel maximaler Ordnung, und

(d) eine dreistufige Quadraturformel maximaler Ordnung mit den Knoten $c_1 = 0$, $c_3 = 1$ und Gewichtsfunktion $\omega(t) = {}^1/\sqrt{t}$.

Aufgabe 8:

Geben Sie das Butcher Tableau zum Verfahren von Heun an. Ein Schritt des Verfahrens ist durch

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{4}\left(f(t_0, y_0) + 3f\left(t_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}hf\left(t_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{h}{3}f(t_0, y_0)\right)\right)\right)$$

gegeben.

b.w.

Aufgabe 9:

Schreiben Sie eine Funktion `DreiachtelRegel(f, tspan, yinit, N)` (in PYTHON oder MATLAB) , welche die 3/8-Regel zur Lösung von

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

implementiert. Hierbei ist `f` die Funktion $f(t, y)$, `tspan=[`t_0, t_N`]`, `yinit` $= y_0$ und `N` die Anzahl der Schritte

Testen Sie Ihre Funktion an

$$f(y) = \lambda y, \quad y(0) = 1, \quad t_N = 2, \quad \mathtt{N} = 20, \quad \text{jeweils für } \lambda = -1, 0, 1, 2.$$

Plotten Sie hierzu die Lösungen zu $t_0, t_1, \ldots, t_N$ zusammen mit den Lösungen des *expliziten Eulers* und mit den exakten Lösungen. Den Quelltext des *expliziten Eulers* finden Sie zur Inspiration auf der Vorlesungsseite.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Mittwoch, 06.05.2020, 9:00 Uhr über ILIAS. Besprechung in der Übung am selben Tag.