MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. FABIAN KARWATOWSKI

5. JUNI 2020

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

19	20	21	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

GRUPPE: ____________________

Analysis I – 7. Übungsblatt

Aufgabe 19: (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wobei a_n gegeben ist durch

(a) $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (b) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ (c) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

Aufgabe 20: (6 Punkte)

Sei für $x \in \mathbb{R}$ die Exponentialreihe gegeben durch

$$e(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Exponentialreihe die Gleichung

$$e(x)e(y) = e(x+y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Berechnen Sie $e(-1)$ bis auf einen Fehler kleiner als 10^{-3}.

Aufgabe 21: (6 Punkte) Verallgemeinertes Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$$

mit $q < 1$. Zeigen Sie, dass dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

Präsenzaufgabe 25:

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie für $\epsilon = 10^{-3}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_n = \frac{2n^2 - n}{n^2 + 1}$$

gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie für $\epsilon = 10^{-3}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ ist.

b.w

Präsenzaufgabe 26:

Wir betrachten die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bzw. $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoulli Ungleichung, indem Sie die Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ und $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ betrachten, dass $(a_n)_n$ streng monton wachsend und $(b_n)_n$ streng monton fallend ist.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Präsenzaufgabe 27:

(a) Finden Sie ein Beispiel für eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert.

(b) Finden Sie ein Beispiel für eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, für die $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1$ gilt.

Präsenzaufgabe 28:

Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+5}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben bis Montag, 15. Juni, 8:00 Uhr in AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 10. und 11. Juni.