MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

25. JUNI 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 13. Übungsblatt

Aufgabe 51:

Für die durch die Steifigkeitsmatrix definierten Normen $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_s$ ist Ihnen bekannt, dass

$$|\!|\!| v_h |\!|\!|_1^2 \leq |\!|\!| v_h |\!|\!|_0 \cdot |\!|\!| v_h |\!|\!|_2 \qquad \text{für alle} \quad v_h \in V_h.$$

Zeigen Sie, dass für die Sobolev-Normen entsprechend gilt: Es gibt eine Konstante c, so dass

$$\|v\|_1^2 \leq c\, \|v\|_0 \cdot \|v\|_2, \qquad \text{für alle} \quad v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{mit } \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2.$$

Geben Sie c explizit an.

Aufgabe 52:

Sei $L > 0$ ein festes feinstes Level und sei $u_L^k \mapsto u_L^{k+1}$ ein Schritt des Mehrgitterverfahrens. Mehrgitterverfahren sind lineare Iterationen, d. h. es gibt eine Iterationsmatrix $G \in \mathbb{R}^{N_L \times N_L}$, so dass für den Fehler $e_L^k = u_L - u_L^k$ gilt $e_L^{k+1} = G\, e_L^k$.

(a) Geben Sie die Iterationsmatrix für das Zweigitterverfahren (also $L = 1$) explizit an. Verwenden Sie das gedämpfte Jacobi-Verfahren als Glätter. *Erinnerung: Die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi-Verfahrens in $\mathbb{R}^{N_\ell}$ ist $I_\ell - \omega D_\ell^{-1} A_\ell$, wobei D_ℓ die Diagonale der Steifigkeitsmatrix A_ℓ und I_ℓ die Einheitsmatrix auf Level ℓ sind.*

(b) Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Spektralradius von G nur von der Summe der Glättungsschritte $\nu_1 + \nu_2$ abhängt, nicht aber von der Anzahl der Vor- bzw. Nachglättungsschritte (ν_1 bzw. ν_2) einzeln.

Aufgabe 53:

Seien $A, B \in \mathcal{L}(X)$ stetige, kommutierende Operatoren, d.h. $AB = BA$. Zeigen Sie

(a) $BR(\lambda, A) = R(\lambda, A)B \qquad \forall\, \lambda \in \rho(A)$,

(b) $R(\lambda, A)R(\mu, B) = R(\mu, B)R(\lambda, A) \qquad \forall\, \lambda \in \rho(A), \mu \in \rho(B)$,

(c) $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \qquad \forall\, \lambda,\ \mu \in \rho(A)$.

(d) Für $A, B \in \mathcal{L}(X)$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:
   (1) $AB = BA$
   (2) $\exp(t(A + B)) = \exp(tA)\exp(tB)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Benutzen Sie für (2) $\Longrightarrow$ (1) in (c) zweite Ableitungen der auftretenden Funktionen.

Aufgabe 54:

Sei $A \in \mathcal{L}(X)$, D ein zusammenhängendes Gebiet, das im Inneren die Eigenwerte von A enthält und Γ eine Kurve, die gegen den Uhrzeigersinn den Rand von D parametrisiert. Zeigen Sie

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t}\, R(\lambda, A)\, d\lambda.$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Resolvente in eine Neumann'sche Reihe und benutzen Sie dann eine Verallgemeinerung der Cauchy'schen Integralformel für höhere Ableitungen.

Besprechung in der Übung am Freitag, 05. Juli 2019.