

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 29: (Konstruktion von Mehrschrittverfahren)

Es sei ϱ ein Polynom vom Grad $\leq k$ mit $\varrho(1) = 0$. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt genau ein Polynom σ vom Grad $\leq k$, so dass die Ordnung des zugehörigen Mehrschrittverfahrens mindestens $k + 1$ ist.
- (b) Es gibt genau ein Polynom σ vom Grad $< k$, so dass die Ordnung des zugehörigen Mehrschrittverfahrens mindestens k ist.

Hinweis: Ein MSV hat die Ordnung p genau dann, wenn

$$\frac{\rho(\xi)}{\log(\xi)} - \sigma(\xi) = \mathcal{O}((1 - \xi)^p) \quad \text{für } \xi \rightarrow 1.$$

Aufgabe 30:

Zeigen Sie, dass alle irreduziblen Zweischrittverfahren der Ordnung zwei durch

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)(\alpha(\zeta - 1) + 1), \quad \sigma(\zeta) = (\zeta - 1)^2\beta + (\zeta - 1)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + 1$$

mit geeigneten Koeffizienten α, β , $\alpha \neq 2\beta$ gegeben sind.

Hinweis: $\rho(e^h) - h\sigma(e^h) = \mathcal{O}(h^3)$, $h \rightarrow 0$, Taylor-Entwicklung von e^h ; Bei Mehrschrittverfahren kommt es nicht auf die Skalierung der Polynome an, obige sind nicht wie in der Vorlesung skaliert.

Definition: Ein Verfahren ist irreduzibel, wenn σ und ρ keine gemeinsamen Wurzeln besitzen.

Aufgabe 31:

Zeigen Sie, dass alle Nullstellen von $\varrho(\zeta)$ eines stabilen, symmetrischen Mehrschrittverfahrens auf dem Einheitskreis liegen.

Hinweis: Ein Mehrschrittverfahren ist symmetrisch, wenn $\alpha_j = -\alpha_{k-j}$, $\beta_j = \beta_{k-j}$ für $j = 0, \dots, k$ gilt. Zeigen Sie, dass daraus $\varrho(\zeta) = -\zeta^k \varrho(\zeta^{-1})$ folgt.

Aufgabe 32:

- (a) Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren.
- (b) Implementieren Sie das implizite Eulerverfahren. Lösen Sie dabei das nichtlineare Gleichungssystem mittels Fixpunktiteration.
- (c) Wenden Sie das explizite und das implizite Eulerverfahren jeweils auf ein Räuber-Beute Modell an. Verwenden Sie dazu eine relativ große Schrittweite und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= -2r(t) + r(t)b(t) & r(0) &= 1 \\ \dot{b}(t) &= b(t) - r(t)b(t) & b(0) &= 1.5 \end{aligned}$$