MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

20.5.2014

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 25: (Lösung linearer Differenzengleichungen)

Gegeben sei die lineare Differenzengleichung

$$\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 y_n = 0. \qquad (\star)$$

$\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ seien die paarweise verschiedenen Nullstellen des erzeugenden Polynoms $\varrho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j$ mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_l$.

Zeigen Sie:

(a) Im Spezialfall $m_i = 1$ für $i = 1, \ldots, l = k$ bilden die Folgen

$$\left\{\zeta_j^n\right\}_{n\geq 0}, \qquad 1 \leq j \leq k$$

ein System von k linear unabhängigen Lösungen von $(\star)$.

Zusatzaufgabe (freiwillig): Falls Sie noch Lust haben, so können Sie auch den allgemeinen Fall $m_i \geq 1$ zeigen:

Für $1 \leq j \leq l$ und $0 \leq i \leq m_j - 1$ bilden die Folgen

$$\left\{\binom{n}{i}\zeta_j^{n-i}\right\}_{n\geq 0}$$

ein System von k linear unabhängigen Lösungen von $(\star)$.

(b) Die Lösung von $(\star)$ ist für jede Wahl von Startwerten $y_0, \ldots, y_{k-1}$ genau dann beschränkt, wenn

$$|\zeta_j| \leq 1 \text{ für } j = 1, \ldots, l \quad \text{und} \quad m_j = 1, \text{ falls } |\zeta_j| = 1.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus der Zusatzaufgabe.
Bemerkung: Dies beweist die Dahlquist'sche Wurzelbedingung (Satz 4.14) aus der Vorlesung.

Aufgabe 26:

Zeigen Sie, dass das k-Schritt BDF Verfahren die Ordnung $p = k$ hat.

Aufgabe 27:

Man nennt ein Mehrschrittverfahren symmetrisch, falls

$$\alpha_{k-i} = -\alpha_i\ , \quad \beta_{k-i} = \beta_i$$

für $i = 0, 1, \ldots, k$ gilt.

Zeigen Sie, dass die (maximale) Ordnung eines symmetrischen Mehrschrittverfahrens immer gerade ist.

(b.w.)

Aufgabe 28:

(a) Zeigen Sie durch Induktion nach j ($j \leq k$), dass für die Folge $y_k = \zeta^k$, $k = 0, 1, \ldots$ gilt:

$$\nabla^j y_k = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

(b) Zeigen Sie damit, dass für implizite Adams-Verfahren

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right), \qquad \sigma(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

und für BDF-Verfahren, gegeben durch $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+k} = h f_{n+k}$,

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j, \qquad \sigma(\zeta) = \zeta^k.$$

gilt.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 28. Mai 2014