

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 21: Zeigen Sie, dass die

(a) Trapezregel

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_{n+1}))$$

(b) und die implizite Mittelpunkregel

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

Ordnung 2 besitzen.

Aufgabe 22: Es werde $f(t, y(t))$ durch das Interpolationspolynom p durch die Punkte

$$(t_{n-k+1}, f_{n-k+1}), \dots, (t_n, f_n), \quad f_j := f(t_j, y_j), \quad t_j = t_0 + h \cdot j$$

interpoliert.

Zeigen Sie mit Hilfe der Newton'schen Interpolationsformel die Darstellung

$$p(t) = p(t_n + \tau h) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-\tau}{j} \nabla^j f_n.$$

Hierbei sind Rückwärtsdifferenzen $\nabla^j f_n$ rekursiv durch

$$\nabla^0 f_n = f_n, \quad \nabla^{j+1} f_n = \nabla^j f_n - \nabla^j f_{n-1}$$

und der im oberen Argument kontinuierliche Binomialkoeffizient durch

$$\binom{\tau}{j} = \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (\tau - k)$$

definiert.

Aufgabe 23: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Wenden Sie die expliziten k -Schritt Adams-Verfahren zur Lösung dieser Differentialgleichung unter Verwendung der exakten Startwerte $y_i = 1/(1 - t_i)$ für $i = 0, 1, \dots, k-1$ an und analysieren Sie die Fehler $y(t_k) - y_k$ für kleine konstante Schrittweiten $t_i = t_0 + h \cdot i$.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz über den Fehler von Polynominterpolation aus der Numerik I.

Aufgabe 24:

Zeigen Sie, dass Runge-Kutta- und Mehrschrittverfahren invariant unter linearen Transformationen $y = Tz$ sind, d. h. wenn man das Verfahren auf $y' = f(t, y)$ und auf $z' = T^{-1}f(t, Tz)$ anwendet mit Anfangsbedingungen $y_0 = Tz_0$ (RKV), bzw. $y_j = Tz_j$, $j = 0, \dots, k-1$ (MSV), so gilt $y_1 = Tz_1$, bzw. $y_k = Tz_k$.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 21. Mai 2014