MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

6.5.2014

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 17:

Schreiben Sie alle Ordnungsbedingungen für Runge-Kutta-Verfahren bis zur Ordnung 5 auf, indem Sie die Tabelle aus der Vorlesung ergänzen.

Aufgabe 18:

Jedes Runge-Kutta-Verfahren kann in der Form

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

mit einer geeigneten Funktion Φ geschrieben werden. Gilt auch

$$y_n = y_{n+1} - h\Phi(t_n + h, y_{n+1}, -h),$$

(ein Schritt mit Schrittweite $-h$ führt zu y_n zurück), so heißt das Verfahren symmetrisch und man kann einige wichtige Eigenschaften (z. B. asymptotische h^2-Entwicklungen des Fehlers) nachweisen.

Zeigen Sie:

(a) Das explizite Eulerverfahren ist nicht symmetrisch.

(b) Die implizite Mittelpunktsregel $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$ ist symmetrisch.

Aufgabe 19:

Zeigen Sie: Ist

$$a_{s+1-i,s+1-j} + a_{ij} = b_j = b_{s+1-j}, \quad c_i + c_{s+1-i} = 1, \qquad i, j = 1, \ldots, s$$

so ist das durch a_{ij}, b_i, c_i definierte, s-stufige Runge-Kutta-Verfahren symmetrisch.

Aufgabe 20:

(a) Bestimmen Sie die Ordnung des klassischen, vierstufigen Runge-Kutta-Verfahrens.

(b) Konstruieren Sie mit den Knoten des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens ein eingebettetes Verfahren, dessen Ordnung um 1 geringer ist.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, 14. Mai 2014