

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9:

Schreiben Sie eine MATLAB Funktion `[Y,T] = Explicit3o8R(f, tspan, yinit, h)`, die die 3/8-Regel zur Lösung von

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

implementiert. Hierbei ist `f` die Funktion $f(t, y)$, $t_0 = \text{tspan}(1)$, $y_0 = \text{yinit}$, $\text{tspan}(2)$ der Endzeitpunkt und `h` die Schrittweite.

Testen Sie Ihr Beispiel für

$$f(y) = \lambda y, y = 1, \text{tspan} = [0, 2], h = 0.1, \quad \lambda = -1, 0, 1, 2$$

und plotten Sie das Ergebnis und bestimmen Sie den Fehler zum Endzeitpunkt.

Aufgabe 10:

Zeigen Sie, dass für ein explizites s -stufiges Runge-Kutta Verfahren mit Ordnung p gilt, dass $p \leq s$.

Hinweis: Betrachten Sie die einfache Testgleichung $\dot{y}(t) = y(t)$; $y(0) = 1$.

Aufgabe 11:

Zeigen Sie:

Falls die rechte Seite $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ einer autonomen Differentialgleichung $\dot{y} = f(y)$ eine globale Lipschitzbedingung erfüllt, d.h.

$$|f(x) - f(z)| \leq L|x - z| \quad \forall x, z \in \Omega$$

ist, so genügt der diskrete Fluß eines expliziten Runge Kutta Verfahrens der Lipschitzbedingung

$$|\Psi(t)x - \Psi(t)z| \leq \exp(tcL)|x - z| \quad \forall x, z \in \Omega$$

wobei die Konstante c nur vom Runge Kutta Verfahren abhängt.

Aufgabe 12:

Zeigen Sie, dass jedes explizite s -stufige Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $p = s$, dass die vereinbarten Bedingungen

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$$

erfüllt, die spezielle Differentialgleichung $y'(t) = f(t)$ mit $f \in \mathcal{P}_{s-1}$ exakt integriert.