

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 44: (Lemma 5 aus (5.16))

Für $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_s)$ gilt

$$W^T B W = I$$

wobei W die in der Vorlesung definierte W -Transformationsmatrix ist.

Aufgabe 45:

- (a) Zeigen Sie, dass die Trapezregel nicht algebraisch stabil ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die implizite Mittelpunktsregel algebraisch stabil ist.

Aufgabe 46:

Für eine Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ heißt y^* Gleichgewichtspunkt, falls $f(t, y^*) = 0$ für alle $t \geq 0$.

Zeigen Sie, dass ein Runge-Kutta-Verfahren Gleichgewichtspunkte erhält, d. h., dass $y_1 = y^*$ gilt, wenn man im Gleichgewichtspunkt $y_0 = y^*$ startet.

Aufgabe 47:

- (a) Gegeben sei ein Kollokationsverfahren mit symmetrisch verteilten Knoten: $c_i = 1 - c_{s+1-i}$ für $i = 1, \dots, s$. Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion des Verfahrens gilt:

$$R(z) \cdot R(-z) = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad (\text{mit Ausnahme der Pole}).$$

Insbesondere ist $|R(z)| \equiv 1$ auf der imaginären Achse.

- (b) Gegeben sei ein Kollokationsverfahren mit $0 < c_1 < \dots < c_s = 1$. Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion des Verfahrens gilt:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0.$$

Hinweis: zu (a): Zeigen Sie

$$a_{ij} = b_j - a_{s+1-i, s+1-j}.$$

Was bedeutet das in Matrixschreibweise?

zu (b): Nehmen Sie $t_0 = 0$ und $h = 1$ an und zeigen Sie

$$R(z) = \frac{M^{(s)}(1) + M^{(s-1)}(1)z + \dots + M(1)z^s}{M^{(s)}(0) + M^{(s-1)}(0)z + \dots + M(0)z^s}, \quad M(x) = \prod_{j=1}^s (x - c_j)$$

indem Sie aus $u'(c_j) - zu(c_j) = 0$ eine Darstellung für $u^{(k)}(x)$ mit Hilfe von $M(x)$ herleiten.

Aufgabe 48:

Wieviel sind 40% von 55? Was schließen Sie daraus?

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, dem 9. Juli 2014