

## Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

### Aufgabe 40:

Zeigen Sie: Für die Stabilitätsfunktion impliziter Runge-Kutta-Verfahren gilt

$$R(z) = \frac{\det(\text{Id} - zA + z\mathbb{1}b^T)}{\det(\text{Id} - zA)}.$$

### Aufgabe 41:

Für  $A \in \mathbb{C}^{m,n}$  und  $B \in \mathbb{C}^{p,q}$  ist das Kronecker-Produkt definiert durch

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mp,nq}.$$

Zeigen Sie für  $A, E \in \mathbb{C}^{m,n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{p,q}$ ,  $C \in \mathbb{C}^{n,k}$  und  $D \in \mathbb{C}^{q,r}$  folgende Rechenregeln für Kronecker-Produkte:

- (a)  $\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$
- (b)  $(A + E) \otimes B = A \otimes B + E \otimes B$
- (c)  $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$
- (d) Für  $m = n$ ,  $p = q$  und  $A, B$  nicht singulär ist  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ .  
Hinweis: Verwenden Sie (c).
- (e) Für  $m = n$ ,  $p = q$  sei  $x$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  und  $y$  ein Eigenvektor von  $B$  zum Eigenwert  $\mu$ . Zeigen Sie, dass  $x \otimes y$  ein Eigenvektor von  $A \otimes B$  zum Eigenwert  $\lambda\mu$  ist.

### Aufgabe 42:

- (a) Zeigen Sie, dass Differentialgleichungen, welche die Bedingung

$$\text{Re} \langle f(t, y) - f(t, z), y - z \rangle \leq 0 \tag{D}$$

erfüllen, kontraktiv sind.

- (b) Zeigen Sie, dass das implizite Eulerverfahren kontraktiv ist.

### Aufgabe 43:

- (a) Interpretieren Sie die implizite Mittelpunktsregel und das explizite Euler-Verfahren als Kollokationsverfahren.
- (b) Ist die Trapezregel

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1))$$

ein Kollokationsverfahren?