



Spektralmethoden – 4. Übungsblatt

Aufgabe 13:

(a) Zeigen Sie, dass für

$$S_h(x) := \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{\frac{\pi x}{h}}$$

in Gitterpunkten $x_j = jh$, $j \in \mathbb{Z}$, gilt

$$S'_h(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ \frac{(-1)^j}{jh} & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Berechnen Sie $S''_h(x_j)$!

Aufgabe 14:

Zeigen Sie für $N = 2$ und $N = 4$, dass $D_N^{(2)} \neq (D_N^{(1)})^2$. ($D_N^{(1)}$ und $D_N^{(2)}$ sind die in der Vorlesung angegebenen Ableitungsmatrizen zur ersten und zweiten Ableitung.)

Aufgabe 15:

(a) Zeigen Sie dass für

$$S_N(x) := \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)}{\frac{2\pi}{h} \tan(x/2)}$$

in Gitterpunkten $x_j = jh$ gilt:

$$S'_N(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } j \equiv 0 \pmod{N} \\ \frac{1}{2}(-1)^j \cot(jh/2) & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$S''_N(x_j) = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3h^2} - \frac{1}{6} & \text{für } j \equiv 0 \pmod{N} \\ -\frac{1}{2}(-1)^j \frac{1}{\sin^2\left(\frac{jh}{2}\right)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 16:

Das Matlabprogramm <http://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/p8.m> berechnet approximativ die ersten vier Eigenwerte des quantenharmonischen Oszillators

$$-u''(x) + x^2 u(x) = \lambda u(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Modifizieren Sie es, so, dass stattdessen die ersten 20 Eigenwerte von

$$-u''(x) + x^4 u(x) = \lambda u(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

approximativ berechnet werden. Wie verändern sich die Eigenwerte? Können Sie die Parameter so wählen, dass die Genauigkeit der berechneten Eigenwerte etwa 10^{-9} ist?

Hinweis: Funktioniert auch in Octave. :)

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, den 6. Juni 2012