



Spektralmethoden – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9:

Zeigen Sie, dass die kontinuierliche Fouriertransformation einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(k) := \hat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$$

folgende Eigenschaften erfüllt:

- (a) Es gilt $\mathcal{F}(u + v)(k) = \mathcal{F}(u)(k) + \mathcal{F}(v)(k)$ und für $c \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{F}(cu)(k) = c\mathcal{F}(u)(k)$. (Linearität)
- (b) Für $y \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{F}(u(\cdot + y))(k) = e^{iky} \mathcal{F}(u)(k)$. (Translation)
- (c) Für $\ell \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{F}(e^{i\ell(\cdot)} u(\cdot))(k) = \mathcal{F}(u)(k - \ell)$.
- (d) Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $\mathcal{F}(u(c \cdot))(k) = \frac{1}{|c|} \mathcal{F}(u)(k/c)$.
- (e) $\mathcal{F}(u')(k) = ik\mathcal{F}(u)(k)$

Hinweis: Kümmern sie sich nicht um Details wie die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die Vertauschung von Limiten, usw.

Aufgabe 10:

Zeigen Sie:

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π periodische, p -mal stetig differenzierbare Funktion und ist $p \geq 2$, so gilt für den Interpolationsfehler

$$|f_N(t) - f(t)| \leq CN^{-p}.$$

Hierbei ist f_N das trigonometrische Interpolationspolynom.

Aufgabe 11:

Sei A eine $N \times N$ Toeplitzmatrix und $x \in \mathbb{R}^N$. Geben Sie ein Verfahren zur schnellen Berechnung des Matrix-Vektroprodukts Ax an.

Was ändert sich, wenn man zusätzlich annimmt, dass A zirkulär ist.

Programmieraufgabe 3:

- (a) Was sehen Sie, wenn sie den Befehl `plot(sin(1:3000), 'r')` in Matlab ausführen. Welche Frequenz nimmt ihr Auge/Gehirn wahr?
- (b) Zeichnen Sie die Funktionen $\sin(\pi x)$ und $\sin(9\pi x)$ im Intervall $[0, 1]$ und auf den Gitterpunkten $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$.
- (c) Zeichnen Sie die Funktion $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, den 23. Mai 2012