

## Spektralmethoden – 3. Übungsblatt

### Aufgabe 9:

Zeigen Sie, dass die kontinuierliche Fouriertransformation einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(k) := \hat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$$

folgende Eigenschaften erfüllt:

- Es gilt  $\mathcal{F}(u+v)(k) = \mathcal{F}(u)(k) + \mathcal{F}(v)(k)$  und für  $c \in \mathbb{R}$  gilt  $\mathcal{F}(cu)(k) = c\mathcal{F}(u)(k)$ . (Linearität)
- Für  $y \in \mathbb{R}$  gilt  $\mathcal{F}(u(\cdot + y))(k) = e^{iky} \mathcal{F}(u)(k)$ . (Translation)
- Für  $\ell \in \mathbb{R}$  gilt  $\mathcal{F}(e^{i\ell(\cdot)} u(\cdot))(k) = \mathcal{F}(u)(k - \ell)$ .
- Für  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt  $\mathcal{F}(u(c \cdot))(k) = \frac{1}{|c|} \mathcal{F}(u)(k/c)$ .
- $\mathcal{F}(u')(k) = ik\mathcal{F}(u)(k)$

Hinweis: Kümmern sie sich nicht um Details wie die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die Vertauschung von Limiten, usw.

### Aufgabe 10:

Zeigen Sie:

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2\pi$  periodische,  $p$ -mal stetige differenzierbare Funktion und ist  $p \geq 2$ , so gilt für den Interpolationsfehler

$$|f_N(t) - f(t)| \leq CN^{-p}.$$

Hierbei ist  $f_N$  das trigonometrische Interpolationspolynom.

### Aufgabe 11:

Sei  $A$  eine  $N \times N$  Toeplitzmatrix und  $x \in \mathbb{R}^N$ . Geben Sie ein Verfahren zur schnellen Berechnung des Matrix-Vektorprodukts  $Ax$  an.

Was ändert sich, wenn man zusätzlich annimmt, dass  $A$  zirkulär ist.

### Programmieraufgabe 3:

- Was sehen Sie, wenn sie den Befehl `plot(sin(1:3000), .)` in Matlab ausführen. Welche Frequenz nimmt ihr Auge/Gehirn wahr?
- Zeichnen Sie die Funktionen  $\sin(\pi x)$  und  $\sin(9\pi x)$  im Intervall  $[0, 1]$  und auf den Gitterpunkten  $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$ .
- Zeichnen Sie die Funktion  $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ .

**Besprechung in den Übungen am Mittwoch, den 23. Mai 2012**