Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle

25.4.2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Spektralmethoden – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5:

Geben Sie einen schnellen Algorithmus zur Berechnung der ersten N Koeffizienten des Produkts zweier formaler Potenzreihen $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ und $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ an.

Aufgabe 6:

Gegeben seien $g_0, \dots, g_{N-1} \in \mathbb{R}$. Die diskrete Cosinus-Transformation (DCT) ist definiert durch

$$(DCT_N\, g)_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j \cos\left(\frac{(2j+1)k\pi}{2N}\right) \qquad \forall k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Zeigen Sie, dass man die DCT auch als Fouriertransformation eines geeigneten Vektors $f \in \mathbb{R}^{2N}$ schreiben kann.

Wie lässt sich dies ausnutzen, um mittels der FFT eine schnelle Cosinus-Transformation zu entwickeln?

Aufgabe 7:

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine absolut summierbare Folge und

$$\hat{c}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

ihre Fouriertransformierte. Zeigen Sie:

(a)

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{c}(t) e^{-int} dt.$$

(b)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{c}(t)|^2 dt.$$

Programmieraufgabe 2:

Das Matlabprogram `p1.m` `http://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/p1.m` berechnet eine zentrale finite Differenzen Approximation vierter Ordnung an die erste Ableitung einer Funktion $u(t)$:

$$u'(t) \approx w(t) := \frac{-u(t-2h) + 8u(t-h) - 8u(t+h) + u(t+2h)}{12h}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung die Konstante C in der Fehlerabschätzung

$$|w(t) - u'(t)| \sim Ch^4 \max_{\tau\in[-\pi,pi]} |u^{(5)}(t)|$$

Berechnen Sie für $u(t) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$ analytisch $u^{(5)}(t)$ und bestimmen sie numerisch $\max_{\tau\in[-\pi,\pi]} |u^{(5)}(t)|$.

Modifizieren Sie `p1.m` derart, dass die gestrichelte Linie durch $Ch^4 \max_{\tau\in[-\pi,\pi]} |u^{(5)}(t)|$ ersetzt wird.

Besprechung in den Übungen am Mittwoch, den 9. Mai 2012