

## Spektralmethoden – 1. Übungsblatt

### Aufgabe 1:

Sei  $f$   $2\pi$ -periodisch mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten  $\hat{f}(n)$ . Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel ergibt

$$\hat{f}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-int_j} \quad \text{mit} \quad t_j = \frac{2j+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie:  $\hat{f}_N(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \hat{f}(n + lN)$ .

Hinweis: Die Fourierkoeffizienten von  $f$  sind  $\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ . Damit gilt Lemma 1.12 der Vorlesung, wenn man  $c_n = \hat{f}(n)$  und  $\hat{c}(t) = f(t)$  setzt.

### Aufgabe 2:

Sei  $V := \text{span}\{e^{ikx} \mid -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}\}$  mit geradem  $N$ . Zeigen Sie:

$$(a) \quad ((f, g)) := \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \overline{g(x_j)}, \quad x_j = \frac{2\pi j}{N}$$

ist eine hermitische Bilinearform (Sesquilinearform) in  $V$  mit

$$((e^{ijx}, e^{ikx})) = \begin{cases} N & \text{für } j, k \in \mathbb{Z} \text{ und } j - k = lN \text{ für ein } l \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b)  $((\cdot, \cdot))$  ist ein Skalarprodukt (Innenprodukt) in  $V$ .

(c)  $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{N}}, -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}$ , bilden eine Orthonormalbasis.

### Aufgabe 3:

Zeigen Sie, falls  $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  absolut summierbar sind, so gilt

$$\left| \sum'_{|n| \leq \frac{N}{2}} (\hat{f}_N(n) - \hat{f}(n)) e^{inx} \right| \leq \sum'_{|n| \geq \frac{N}{2}} |\hat{f}(n)|$$

(Der Strich an der Summe bedeutet, dass der erste und letzte Summand halbiert werden.)

b.w.

### **Programmieraufgabe 1:**

Sei  $N = 2^L$  für  $L \in \mathbb{N}$ .

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `myft`, die zu einem gegebenen Vektor  $u \in \mathbb{C}^N$  auf naive Weise den fouriertransformierten Vektor berechnet.
- (b) Schreiben Sie eine Funktion `myfft`, die zu einem gegebenen Vektor  $u \in \mathbb{C}^N$  mit Hilfe des schnellen Algorithmus der Vorlesung den fouriertransformierten Vektor berechnet.
- (c) Vergleichen Sie für verschieden  $L$  die Laufzeiten von `myft`, `myfft` und der Matlab internen `fft` Funktion. (Loglogplot Cpuzeit gegen  $N$ .)