

Spektralmethoden – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei f 2π -periodisch mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$. Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel ergibt

$$\hat{f}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-int_j} \quad \text{mit} \quad t_j = \frac{2j+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie: $\hat{f}_N(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \hat{f}(n + lN)$.

Hinweis: Die Fourierkoeffizienten von f sind $\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$. Damit gilt Lemma 1.12 der Vorlesung, wenn man $c_n = \hat{f}(n)$ und $\hat{c}(t) = f(t)$ setzt.

Aufgabe 2:

Sei $V := \text{span}\{e^{ikx} \mid -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}\}$ mit geradem N . Zeigen Sie:

(a)
$$((f, g)) := \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \overline{g(x_j)}, \quad x_j = \frac{2\pi j}{N}$$

ist eine hermitesche Bilinearform (Sesquilinearform) in V mit

$$((e^{ijx}, e^{ikx})) = \begin{cases} N & \text{für } j, k \in \mathbb{Z} \text{ und } j - k = lN \text{ für ein } l \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $((\cdot, \cdot))$ ist ein Skalarprodukt (Innenprodukt) in V .

(c) $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{N}}, -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}$, bilden eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, falls $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ absolut summierbar sind, so gilt

$$\left| \sum'_{|n| \leq \frac{N}{2}} (\hat{f}_N(n) - \hat{f}(n)) e^{inx} \right| \leq \sum'_{|n| \geq \frac{N}{2}} |\hat{f}(n)|$$

(Der Strich an der Summe bedeutet, dass der erste und letzte Summand halbiert werden.)

b.w.

Programmieraufgabe 1:

Sei $N = 2^L$ für $L \in \mathbb{N}$.

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `myft`, die zu einem gegebenen Vektor $u \in \mathbb{C}^N$ auf naive Weise den fouriertransformierten Vektor berechnet.
- (b) Schreiben Sie eine Funktion `myfft`, die zu einem gegebenen Vektor $u \in \mathbb{C}^N$ mit Hilfe des schnellen Algorithmus der Vorlesung den fouriertransformierten Vektor berechnet.
- (c) Vergleichen Sie für verschieden L die Laufzeiten von `myft`, `myfft` und der Matlab internen `fft` Funktion. (Loglogplot Cpuzeit gegen N .)