Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

23.5.2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Operatorentheorie für Numerische Analysis – 8. Übungsblatt

Aufgabe 22:

Wir betrachten den Beweis von *ii)* $\Rightarrow$ *i)* des Hille-Yoshida Theorems im Kontraktionsfall. Dort haben wir mit den *Hille-Yoshida-Approximationen*

$$A_n := nAR(n, A)$$

definiert

$$T(t)x := \lim_{n\to\infty} \exp(tA_n)x.$$

Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von *ii)* dann $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe ist.

Aufgabe 23:

Sei $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ and definiere den Operator A durch

$$Af = \Delta f, \quad D(A) := \left\{ f \in C^2(\Omega) \mid f \text{ hat kompakten Träger} \right\}$$

auf $L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass A ein dissipativer Operator ist und sein Abschluss eine Kontraktionshalbgruppe generiert.

Aufgabe 24:

Zeigen Sie: Für $0 \neq f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und die Funktion

$$\phi(s) := \begin{cases} \overline{f(s)} \cdot |f(s)|^{p-2} \cdot \|f\|^{2-p} & \text{falls } f(s) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt $\phi \in J(f) \subseteq L^{p'} = L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Aufgabe 25:

Der Operator $(A, D(A))$ auf X generiere eine Kontraktionshalbgruppe und $(B, D(B))$ auf X erfülle $D(A) \subseteq D(B)$ und habe die Eigenschaft: Es existieren Konstanten $a \in [0, \frac{1}{2})$ und $b > 0$, do dass

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \qquad \forall\ x \in D(A).$$

Zeigen Sie: für große $\lambda > 0$ erhält man $\|BR(\lambda, A)\| < 1$.

Besprechung in den Übungen am Donnerstag, den 31. Mai 2012, 14:30 Uhr in 25.22-O0.72