Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

3.5.2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Operatorentheorie für Numerische Analysis – 5. Übungsblatt

Aufgabe 4:

Sei $A : X \to Y$ ein linearer Operator zwischen Banachräumen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist beschränkt,

(b) A ist stetig in 0 und

(c) A ist stetig in X.

Aufgabe 16:

Bestimmen Sie den Abschluss der beiden folgenden Operatoren:

(a) $X = c_0$ der Raum aller 0-Folgen in $\mathbb{R}$ mit Indexmenge $\mathbb{N}$. $A(x_n)_n := (nx_n)_n$ für $(x_n)_n \in D(A) = \{ (x_n)_n \mid x_n \neq 0 \text{ für nur endlich viele } n \}$.

(b) $X = C([0,1])$. $Bf = f'$ für $f \in D(B) := C^\infty([0,1])$.

Zeigen Sie weiterhin, dass der Operator $(A, C^1([0,1]))$, der durch $(Af)(s) \equiv f'(0)$ gegeben ist, in $C([0,1])$ nicht abschließbar ist.

Aufgabe 17:

Finden Sie eine Folge kompakter Operaten, die keine konvergente Teilfolge hat.

Aufgabe 18:

Zeigen Sie für die Multiplikationshalbgruppe aus Beispiel (2.10 b)): Der lineare Operator $(M_q, D(M_q))$ ist abgeschlossen, wobei

- Ω ein Gebiet sei,
- $X = C_0(\Omega)$,
- $q : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig mit $\operatorname{Re} q(\xi) \leq c < \infty$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$,
- $M_q : X \to X$, $f \mapsto (s \mapsto q(s)f(s))$ und
- $D(M_q) = \{ f \in X \mid qf \in X \}$.

Besprechung in den Übungen am Donnerstag, den 10. Mai 2012, 14:30 Uhr in 25.22-O0.72