Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

26.4.2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Operatorentheorie für Numerische Analysis – 4. Übungsblatt

Erinnerung: Auf einem Banachraum X sei ein linearer Operator $(A, D(A))$ gegeben. Man bezeichnet die Menge $G(A) := \{ (x, Ax) \mid x \in D(A) \}$ als den *Graphen von* A. Ferner definiert man für $x \in D(A)$ die *Graphennorm* $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$. $(A, D(A))$ heißt abgeschlossen, falls für jede Folge $(x_n)_n \subseteq X$ mit $x_n \to x \in X$ und $Ax_n \to y \in X$ folgt, dass $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

Aufgabe 12:

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

  (a) Der Operator $(A, D(A))$ ist abgeschlossen.

  (b) Der Graph $G(A)$ ist abgeschlossen in der Produkttopologie von $X \times X$.

  (c) Der normierte Raum $(D(A), \|\cdot\|_A)$ ist vollständig.

(b) Sei A injektiv, so ist $(A, D(A))$ genau dann abgeschlossen, wenn $(A^{-1}, R(A))$ abgeschlossen ist, wobei mit $R(A)$ das Bild von A bezeichnet wird.

(c) Auf $X = C([0, 1])$ seien die Operatoren $(A_i, D(A_i))$ durch die Abbildungsvorschrift $A_i f := f'$ und $D(A_1) = C^1([0, 1])$, $D(A_2) = \{ f \in C^1([0, 1]) \mid f'(0) = 0 \}$ bzw. $D(A_3) := C^\infty([0, 1])$ gegeben. Zeigen Sie, dass A_1 und A_2 abgeschlossen sind, aber A_3 nicht.

Aufgabe 13:

Überlegen Sie sich ein Beispiel für eine stark stetige nilpotente Halbgruppe. d.h. es existiert ein t_0 so, dass $T(t) = 0$, für alle $t \geq t_0$.

Aufgabe 14:

Sei H ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ und $A : D(A) \subseteq H \to H$ linear und dicht definiert mit den Eigenschaften:

(a) A ist *symmetrisch*, d.h. $\langle Au\, , v \rangle = \langle u\, , Av \rangle$ für alle $u, v \in D(A)$

(b) A ist *koerziv*, d.h. es gibt eine Konstante $c > 0$ so, dass $\langle Au\, , u \rangle \geq c\|u\|^2$ für alle $u \in D(A)$.

Für alle $v \in D(A)$ und ein gegebenes $f \in H$ definieren wir das Funktional

$$F(v) := \langle Av\, , v \rangle - 2 \langle f\, , v \rangle\, .$$

Zeigen Sie, dass aus $Au = f$ für ein $u \in D(A)$ folgt, dass das Funktional F von u über alle $v \in D(A)$ minimiert wird, d.h. $F(u) < F(v)$ für alle $v \neq u$.

b.w.

Ein linearer Operator $(A, D(A))$ auf einem Banachraum X heißt *abschließbar*, falls es einen abgeschlossenen Operator $(B, D(B))$ gibt, mit $G(A) \subseteq G(B)$. Das bedeutet, dass $D(A) \subseteq D(B)$ und dass $Ax = Bx$ für alle $x \in D(A)$. Einen solchen Operator bezeichnet man als *Fortsetzung* von A. Die kleinste Fortsetzung bezeichnet man als den *Abschluss* $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ von A.

Aufgabe 15:

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Die Menge $\overline{G(A)}$ ist der Graph eines linearen Operators $(B, D(B))$.

(b) Der Operator $(A, D(A))$ ist abschließbar und $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$.

(c) Falls $(x_n)_n \subseteq D(A)$ mit $x_n \to 0$ und $Ax_n \to y$, so $y = 0$.

Besprechung in den Übungen am Donnerstag, den 3. Mai 2012, 14:30 Uhr in 25.22-O0.72