Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

19.4.2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Operatorentheorie für Numerische Analysis – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9:

Finden Sie andere Banachräume, auf denen die Translationshalbgruppe

(a) stark stetig bzw.

(b) nicht stark stetig

ist.

Aufgabe 10:

Charakterisieren Sie normstetige Multiplikationshalbgruppen.

Aufgabe 11:

Betrachte den Banachraum $X = C_0(\mathbb{R})$ und eine stetige, beschränkte Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Definiere

$$T(t)f(s) := \exp\left(\int_0^t q(s-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \cdot f(s-t)$$

für $s \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ und $f \in X$.

(a) Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X ist.

(b) Berechnen Sie den Generator von T.

(c) Kann man q auch unbeschränkt wählen, um dennoch eine stark stetige Halbgruppe zu erhalten?

Aufgabe 12:

Auf einem Banachraum X sei ein linearer Operator $(A, D(A))$ gegeben. Man bezeichnet die Menge $G(A) := \{ (x, Ax) \mid x \in D(A) \}$ als den *Graphen von* A. Ferner definiert man für $x \in D(A)$ die *Graphennorm* $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

  (a) Der Operator $(A, D(A))$ ist abgeschlossen.

  (b) Der Graph $G(A)$ ist abgeschlossen in der Produkttopologie von $X \times X$.

  (c) Der normierte Raum $(D(A), \|\cdot\|_A)$ ist vollständig.

(b) Sei A injektiv, so ist $(A, D(A))$ genau dann abgeschlossen, wenn $(A^{-1}, R(A))$ abgeschlossen ist, wobei mit $R(A)$ das Bild von A bezeichnet wird.

(c) Auf $X = C([0,1])$ seien die Operatoren $(A_i, D(A_i))$ durch die Abbildungsvorschrift $A_i f := f'$ und $D(A_1) = C^1([0,1])$, $D(A_2) = \{ f \in C^1([0,1]) \mid f'(0) = 0 \}$ bzw. $D(A_3) := C^\infty([0,1])$ gegeben. Zeigen Sie, dass A_1 und A_2 abgeschlossen sind, aber A_3 nicht.

Besprechung in den Übungen am Donnerstag, den 26. April 2012, 14:30 Uhr in 25.22-O0.72