Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

12.4.2012

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Operatorentheorie für Numerische Analysis – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5:

Zeigen Sie die Implikation $i) \Longrightarrow ii)$ aus Satz 1.3, d. h. sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine normstetige Halbgruppe, so gilt: Die Abbildung $t \mapsto T(t)$ ist differenzierbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) = AT(t) = T(t)A \quad \text{mit} \quad A := \dot{T}(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)|_{t=0}$$

Hinweis: Aufgabe 3

Aufgabe 6:

Zeigen Sie die Implikation $ii) \Longrightarrow iii)$ aus Satz 1.3, d. h. sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe, für die gilt: Die Abbildung $t \mapsto T(t)$ ist differenzierbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) = AT(t) = T(t)A \quad \text{mit} \quad A := \dot{T}(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)|_{t=0},$$

dann ist $A \in \mathcal{L}(x)$ und $T(t) = \exp(tA)$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 7:

Seien $A, B \in \mathcal{L}(X)$ stetige, kommutierende Operatoren, also $AB = BA$. Zeigen Sie die beiden folgenden Lemmata aus Einschub A:

(a) Lemma A.10, d.h. dann kommutieren auch die Resolventen des einen Operators mit dem anderen Operator:

$$BR(\lambda, A) = R(\lambda, A)B \qquad \forall\ \lambda \in \rho(A)$$

(b) Lemma A.11, d.h. dann kommutieren auch die Resolventen:

$$R(\lambda, A)R(\mu, B) = R(\mu, B)R(\lambda, A) \qquad \forall\ \lambda \in \rho(A), \mu \in \rho(B)$$

Zeigen Sie weiterhin

(c) Für $A, B \in \mathcal{L}(X)$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind

(1) $AB = BA$

(2) $\exp(t(A + B)) = \exp(tA)\exp(tB)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Benutzen Sie für $(2) \Longrightarrow (1)$ in (c) zweite Ableitungen der auftretenden Funktionen.

Aufgabe 8:

Sei $X = C_0(\mathbb{R}) := \{\ f \in C(\mathbb{R}) \mid \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt mit $|f(s)| < \epsilon$ für $s \in \mathbb{R} \setminus K\ \}$ versehen mit der Surpremumsnorm. Für festes $\alpha > 0$ definiere den Operator A_α als den Differenzenquotienten

$$A_\alpha f(s) := \frac{1}{\alpha}(f(s + \alpha) - f(s)), \qquad f \in X, s \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $A_\alpha \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|A_\alpha\| \leq 2/\alpha$, also

$$\|\exp(tA_\alpha)\| \leq \exp(t\,2/\alpha) \qquad \forall\ t \neq 0.$$

Allerdings kann $\exp(tA_\alpha)$ explizit also

$$\exp(tA_\alpha)f(s) = \exp(-t/\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{({}^t/_\alpha)^k}{k!}f(s+k\alpha), \quad f \in X, s \in \mathbb{R}$$

und erfüllt daher die viel bessere Bedingung

$$\|\exp(tA_\alpha)\| = 1.$$

Besprechung in den Übungen am Donnerstag, den 19. April 2012, 14:30 Uhr in 25.22-O0.72