Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

28.6.2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Operatorentheorie für Numerische Analysis – 13. Übungsblatt

Wir betrachten das abstrakte Cauchy Problem

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) + f_k(t), & 0 \le t \le T \\ u(0) = x \in X \end{cases}, \qquad (\mathrm{ACP})_{x,f_k}$$

wobei $(A, D(A))$ der Generator einer starkstetigen Halbgruppe $(T(t))_{t\ge 0} =: \exp(tA)$ auf dem Banachraum X sei.

Nun wählen wir für $k \in \mathbb{N}$ die Inhomogenität

$$f_n(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \in C([0,T], X).$$

Setze

$$\varphi_k(z) := \int_0^1 \exp((1-s)z) \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} \, \mathrm{d}s.$$

Aufgabe 37:

Zeigen Sie:

$$u(t) = \exp(tA)x + t^k \varphi_k(tA)$$

ist die milde Lösung von $(\mathrm{ACP})_{x,f_k}$.

Aufgabe 38:

(a) Zeigen Sie, dass die φ_k der Rekursionsformel

$$\varphi_k(z) = \frac{\varphi_{k-1}(z) - \frac{1}{(k-1)!}}{z}, \quad k \ge 1$$

mit

$$\varphi_0(z) := \exp(z)$$

genügen.

(b) Leiten Sie damit eine Reihenentwicklung für $\varphi_k(z)$ aus der Reihenentwicklung von $\exp(z)$ her. Bestimmen Sie $\varphi_k(0)$, indem Sie die hebbare Unstetigkeit in der Null stetig fortsetzen.

(c) Zeichnen Sie $\varphi_k(z)$ mit `MATLAB` auf dem Intervall $[-10, 10]$, $k = 0, 1, 2, 3$ mit logarithmischer Skala für die y-Achse. Benutzen Sie zur Auswertung:

```
N = 65;
z = 10.^linspace(-16, 0, N);
z = [ -z(end:-1:1), 0, z ] * 10;
```

Was passiert? Wie könnte man auftretende Probleme beheben?

b.w.

Aufgabe 39:

(a) Zeigen Sie: Die Operatoren $\varphi_k(tA)$ sind für $k = 0, 1, 2, \dots, 0 \le t \le T$ gleichmäßig beschränkt.

(b) Zeigen Sie, dass das exponentielle Euler Verfahren

$$u_{n+1} = \exp(hA)u_n + h\varphi_1(hA)f(t_n), \qquad t_n = n \cdot h$$

zur Approximation von $(\mathrm{ACP}_{x,f})$ mit $f \in C^1([0,T], X)$ Ordnung 1 hat. Zeigen Sie also, dass

$$\|u_n - u(t_n)\| \le C \cdot h$$

mit einer Konstante unabhängig von n und t gilt auf kompakten Intervallen $[0,T]$. Die Konstante darf dabei natürlich von T abhängen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Verwenden Sie die milde Lösungsformel und eine Taylorentwicklung von f mit Restglieddarstellung ausgewertet an einer Zwischenstelle, um den *Defekt* δ_{n+1} zu finden, der

  $$u(t_n + h) = \exp(hA)u(t_n) + h\varphi_1(hA)f(t_n) + d_{n+1}$$

  erfüllt.
- Schätzen Sie die Norm des Defektes ähnlich wie in (a) ab. Dieser sollte einen Faktor h^2 enthalten.
- Zeigen Sie für den Fehler $e_n := u(t_n) - u_n$:

  $$e_{n+1} = \exp(hA)e_n + \delta_{n+1}$$

  und lösen Sie diese Rekursion auf.
- Benutzen Sie die vorigen Abschätzungen, um das gewünschte Resultat zu zeigen.

Hinweis: Nutzen Sie, dass die Halbgruppe vom Typ (M, ω) ist.

Besprechung in den Übungen am Donnerstag, den 5. Juli 2012, 14:30 Uhr in 25.22-O0.72