Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

20.6.2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Operatorentheorie für Numerische Analysis – 12. Übungsblatt

Aufgabe 34:

Zeigen Sie, dass der Abschluss $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ des Operators

$$Af = f'', \quad D(A) = \left\{ f \in C^2([0,1]) \mid f(0) = f(1) = 0 \right\}$$

eine analytische Halbgruppe auf dem Hilbertraum $X = L^2([0,1])$ erzeugt.

Aufgabe 35:

Eine Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf X heißt *stark stetig*, falls sowohl $(T(t))_{t\geq 0}$ als auch $(T(-t))_{t\geq 0}$ stark stetige *Halb*gruppen sind.

Zeigen Sie: Sei $(A, D(A))$ Generator einer beschränkten, stark stetigen Gruppe. Dann erzeugt $(A^2, D(A^2))$ eine beschränkte, analytische Halbgruppe auf X mit Winkel $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 36:

Sei $X = C_0(\Omega)$. Wir sahen bereits, dass für $q \in C(\Omega)$ der Multiplikationsoperator $(M_q, D(M_q))$,

$$M_q f = (s \mapsto q(s)f(s)), \qquad D(M_q) = \{ f \in X \mid q \cdot f \in X \}$$

eine stark stetige Multipliktionshalbgruppe $(T_q(t))_{t\geq 0}$ auf X erzeugt, falls $\sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$. Diese hat dann die Form

$$T_q(t) = M_{\exp(tq)}.$$

Zeigen Sie: $(T_q(t))_{t\geq 0}$ ist beschränkt und analytisch mit Winkel δ genau dann, wenn

$$S_{\delta+\frac{\pi}{2}} \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{q(\Omega)}.$$

Besprechung in den Übungen am Donnerstag, den 28. Juni 2012, 14:30 Uhr in 25.22-O0.72