Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing

8.6.2012

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Operatorentheorie für Numerische Analysis – 11. Übungsblatt

Aufgabe 30:

Sei $(A, D(A))$ ein dissipativer Operator. Zeigen Sie: $(A, D(A))$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $R(\lambda - A)$ abgeschlossen ist für ein (und damit alle) $\lambda > 0$.

Aufgabe 31:

Sei $(A, D(A))$ ein dissipativer Operator. Zeigen Sie:

(a) Falls $R(A) \subseteq \overline{D(A)}$, so ist A abschließbar. Dies ist zum Beispiel der Fall, falls $\overline{D(A)} = X$, der Operator also dicht definiert ist.

(b) Der Abschluss $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ ist wieder dissipativ mit $R(\lambda - \overline{A}) = \overline{R(\lambda - A)}$ für alle $\lambda > 0$.

Aufgabe 32: (Milde Lösungen)

Eine Abbildung $u : \mathbb{R}_+ \to X$ heißt *milde Lösung* des abstrakten Cauchy Problems (ACP)

$$\dot{u}(t) = Au(t), \quad u(0) = u_0,$$

falls $\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s \in D(A)$ für alle $t \geq 0$ und

$$u(t) = A \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s + u_0.$$

Zeigen Sie: Sei $(A, D(A))$ der Generator einer stark stetigen Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$. Dann ist für jedes $u_0 \in X$ die Abbildung

$$t \mapsto u(t) := T(t)x$$

eine eindeutige milde Lösung des (ACP).

Bemerkung: Klassische Lösungen müssen nach Voraussetzung differenzierbar sein. Und das geht nach Definition des Generators genau nur dann, wenn der Startwert u_0 Definitionsbereich von A liegt. Bei milder Lösbarkeit wird auf auf die Differenzierbarkeit verzichtet, denn

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[A \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s + u_0\right] = A \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s = Au(t)$$

existiert nur, wenn $u(t) \in D(A)$, was hier nicht vorausgesetzt wird.

Bemerkung: Die Umkehrung der Aussage ist allerdings nicht wahr: Falls für jeden Startwert u_0 solch eine eindeutige milde Lösung existiert, muss A aber nicht zwingend eine stark stetige Halbgruppe erzeugen, vgl. etwa K.-J. Engel, R. Nagel – One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Beispiel V.5.5.

Aufgabe 33:

Sei $X = C_0(\mathbb{R})$ und $Af = f'' + f'$ mit dem Definitionsbereich $D(A) = \{\ f \in C^2(\mathbb{R}) \cap X \ | f'' + f' \in X\ \}$. Zeigen Sie, dass $(A, D(A))$ eine Kontraktionshalbgruppe generiert.

Hinweis: Störungstheorie.

Besprechung in den Übungen am Donnerstag, den 21. Juni 2012, 14:30 Uhr in 25.22-O0.72