

Operatorentheorie und Numerische Analysis – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so definieren wir $\exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$. Zeigen Sie:

- (a) $\exp(tA)$ konvergiert punktweise in der induzierten Matrixnorm.
- (b) $\exp(tA)$ ist eine Halbgruppe.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie $\exp(tA)$ für

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & 1 & \\ & & \mu & 1 \\ & & & \mu \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3: Gesucht ist eine Abbildung $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ die, die Funktionalgleichung:

$$\begin{cases} T(s+t) = T(s)T(t), & s, t \geq 0 \\ T(0) = 1 \end{cases}$$

erfüllt. Zeigen Sie: Ist $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und erfüllt obige Funktionalgleichung, so gibt es ein eindeutig bestimmtes $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $T(t) = \exp(\lambda t) \forall t \geq 0$.