

## Computergestützte Mathematik II (Analysis mit Maple) – 6. Übungsblatt

Aufgaben zum Maple-Arbeitsblatt v14.mws

### Aufgabe 62:

Gegeben seien die komplexen Zahlen  $a := 2 + 5i$ ,  $b := 4 - 8i$  und  $c := -3 + 9i$ . Berechnen Sie  $ab$ ,  $bc$ ,  $ac$  und deren komplex Konjugierte. Berechnen Sie ferner  $a/b$ ,  $b/a$ ,  $a/c$ ,  $c/a$ ,  $b/c$ ,  $c/b$  und deren Beträge.

### Aufgabe 63:

Untersuchen Sie, welche der Folgen  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_k := ((4 + 2i)k^2 + i) \sin\left(\frac{(3+i)k}{(ki+1)^3}\right), \quad a_k := k \left( \exp\left(\frac{1+i}{k}\right) - 1 \right),$$
$$a_k := k^2 \left( \cos\left(\pi + \frac{i}{k}\right) + 1 \right), \quad a_k := i^k$$

einen Grenzwert besitzen.

### Aufgabe 64:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+i)^{2k}}{4^k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(2+i)^{k+1}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(ik+i)^2}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(4+4i)^k}{(k+2)!}.$$

### Aufgabe 65:

Lassen sie die Graphen der folgenden Funktionen in einem Plot in den genannten Farben über dem Intervall  $[0, 2\pi]$  ausgeben

$$g : x \mapsto \Re(e^{e^{ix}}), \text{ grün; } h : x \mapsto \Im(e^{e^{ix}}), \text{ rot; } k : x \mapsto |e^{e^{ix}}|, \text{ blau.}$$

### Aufgabe 66:

Leiten Sie für  $\cos(4x)$  und  $\sin(4x)$  diejenigen Identitäten aus der Eulerschen Formel ab, welche Maple nach Anwendung des Befehl `expand` ausgibt. Vergleichen Sie mit den Vorschlägen des Befehls `trigsubs`.

### Aufgabe 67:

Leiten Sie für  $x, y, z \in \mathbb{R}$  die folgenden Identitäten her

$$(a) \cos(2 \arctan(x)) = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$(b) e^{2i \arctan(x)} = \frac{1+ix}{1-ix},$$

$$(c) \sin(x) \sin(y) \sin(z) = \frac{1}{4} (\sin(x+y-z) + \sin(x-y+z) + \sin(-x+y+z) - \sin(x+y+z)).$$

### Aufgabe 68:

Die Tschebyscheffschen Polynome  $T_k$  werden für  $k \in \mathbb{N}$  definiert als

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)).$$

Berechnen Sie  $T_k$  für  $k = 0, \dots, 7$  und lassen Sie deren Graphen in einem Plot über  $[-1, 1]$  zeichnen. Berechnen Sie ferner die Nullstellen von  $T_1, \dots, T_6$ .

**Aufgabe 69:**

- (a) Berechnen Sie alle vierten Wurzeln aus  $a = i$  in der Form  $\alpha + i\beta$  und überprüfen Sie die Ergebnisse, indem Sie sie in die vierte Potenz erheben.
- (b) Berechnen Sie für  $a = 2 + 2i$  die Zahlen  $a^5$  und  $\sqrt{a^5}$ . Wandeln Sie  $a$  in Polarkoordinaten um und berechnen Sie  $a^5$  und  $\sqrt{a^5}$  in Polarkoordinaten. Untersuchen Sie, ob sich die Ausgaben für  $\sqrt{a^5}$  in den beiden Darstellungen unterscheiden.

**Aufgabe 70:**

Plotten Sie die Graphen der Funktionen  $g : x \mapsto \Re(\sqrt{e^{ix}})$  und  $h : x \mapsto \Im(\sqrt{e^{ix}})$  über dem Intervall  $[0, 2\pi]$ .

\_\_\_\_\_ Aufgaben zu den Maple-Arbeitsblättern v15.mws und v16.mws \_\_\_\_\_

**Aufgabe 71:**

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f : x \mapsto \arctan(x) \exp(-x^3 + 1) \log(x^2 + 1).$$

Berechnen Sie  $f'$  und  $f''$  und fassen Sie anschließend Terme mit  $\exp(-x^3 + 1)$ ,  $\arctan(x)$  und  $\log(x^2 + 1)$  mit `collect` zusammen. Verändern Sie dabei die Reihenfolge, in welcher Sie zusammenfassen lassen. Bei  $f''$  sollen die  $x$ -Potenzen absteigend geordnet sein. Plotten Sie  $f$  und  $f'$  über  $[-0.8, 2]$ .

**Aufgabe 72:**

Zeigen Sie, daß die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$  eine auf  $\mathbb{R}$  stetige Fortsetzung besitzt, und untersuchen Sie, ob die so fortgesetzte Funktion auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist.

**Aufgabe 73:**

Gegeben sei die Heaviside-Funktion  $H$  (mit  $H(0) = 0$ ) und die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) := (-x^4 + 4x^2 + 1) H(x) + \cos(3x) (1 - H(x)).$$

Zeigen Sie, dass  $g$  auf  $\mathbb{R}$  stetig differenzierbar ist, und prüfen Sie, ob  $g'$  in Null differenzierbar oder einseitig differenzierbar ist. Zeichnen Sie den Graphen von  $g$ ,  $g'$  und  $g''$  in einem Plot.

**Aufgabe 74:**

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) := (-x^3 + 2x^2 + 2x) \exp(-x)$ . Bestimmen Sie die Nullstellen, die lokalen Maxima und Minima sowie die Wendestellen von  $f$ . Bestimmen Sie ferner die Bereiche über denen  $f$  konvex bzw. konkav ist, und überprüfen Sie die erhaltenen Ergebnisse, indem Sie  $f$ ,  $f'$  und  $f''$  in einem Plot verschiedenfarbig darstellen.

**Aufgabe 75:**

Gegeben sei die Polynomfunktion  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 1$ . Bestimmen Sie die gleichen Größen für  $f$  wie in der letzten Aufgabe. Lassen sie sich nötigenfalls einige Werte mit `evalf` näherungsweise berechnen.

**Übungen:** Montag, 14–16 Uhr, Mittwoch 14–16, 16–18 Uhr im CIP-Pool  
Aktuelle Informationen zu dieser Lehrveranstaltung gibt es online unter  
[www.am.uni-duesseldorf.de/~marlis/maple](http://www.am.uni-duesseldorf.de/~marlis/maple)