Mathematisches Institut
Prof. Dr. Marlis Hochbruck

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

22.5.2002

Computergestütze Mathematik II (Analysis mit Maple) – 5. Übungsblatt

Aufgaben zum Maple-Arbeitsblatt `v11.mws`

Aufgabe 51:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\cos\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ für $x < 0$ und $\frac{1}{2}\cos(x)\exp(-x)$ für $x > 0$. Plotten Sie den Graphen von f über $[-4, 4]$ mit dem Titel "eine unstetige Funktion", so dass man die Sprungstelle gut sieht.

Aufgabe 52:

Plotten Sie die Graphen der Funktionen $f : x \mapsto x \log(1 + \sin(x))$ und $g : x \mapsto \cos\left(\exp\left(x^3/10\right)\right)$ über $[-3, 3]$ in einem Plot in den Farben grün (für f) und blau.

Aufgabe 53:

Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen im angegebenen Punkt a einen Grenzwert besitzen.

$$x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right),\ a = \infty; \qquad x\sin\left(\tfrac{1}{x^2}\right),\ a = \infty; \qquad x^2\sin\left(\tfrac{1}{x}\right),\ a = \infty;$$

$$x^2\left(\cos\left(\tfrac{1}{x}\right) - 1\right),\ a = \infty; \qquad \tfrac{\sin(x)-x}{x^k},\ a = 0,\ k = 1, 2, 3;$$

$$\tfrac{\sin(x)-x}{x},\ a = \infty; \qquad \sqrt{x}\cos\left(\exp\left(\tfrac{1}{x}\right)\right),\ a = 0$$

Aufgabe 54:

Die Funktion `floor`: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in Maple definiert durch `floor(x)` als die größte ganze Zahl kleiner gleich x. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion

$$f : [-1, 4.5] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \left(x^3 - 8x^2 + 20x - 16\right)\operatorname{floor}(x)$$

unstetig ist.

Aufgaben zum Maple-Arbeitsblatt `v12.mws`

Aufgabe 55:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ im Nullpunkt einen Grenzwert besitzen:

$$f(x, y) := \frac{x^4 + y}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) := \frac{x^4 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

Um zu einer Vermutung zu kommen, plotten Sie den Graphen von f und g über dem Quadrat $[-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2]$ bei geeigneter Orientierung, und betrachten Sie die Projektionen der Höhenlinien in die (x, y)-Ebene. Beweisen Sie die aus dem Plot hergeleitete Vermutung.

Aufgabe 56:

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \frac{(xy + \sin(y))^2}{\sin(x)^2 + y^2}, \quad f(x, y) := \frac{(x + y)^3}{\sin(x^2 + y^4)}.$$

Untersuchen Sie wie in der vorigen Aufgabe, ob f im Nullpunkt einen Grenzwert besitzt. Plotten Sie dazu den Graphen von f über $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 57:

Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x, y) := \sin(x + y) + \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - \frac{x^2 + y^2}{40}.$$

Plotten Sie den Graphen von g über $[-6\pi, 6\pi] \times [-6\pi, 6\pi]$ in der Orientierung $[-160, 40]$.

Wählen Sie für die Darstellung ein geeignetes Gitter und verwenden Sie mit diesem Gitter einmal die Option `style=hidden` und ein anderes Mal `style=patchcontour` mit `shading=zgreyscale` bei `view=-4..1`. Wählen Sie am Plot `lightscheme 4` aus. Plotten Sie auch die Projektion der Höhenlinien in die (x, y)-Ebene.

Aufgaben zum Maple-Arbeitsblatt `v13.mws`

Aufgabe 58:

Berechnen Sie $\log_2 16$, $\log_3 243$, $\log_8 35184372088832$ und $a^{17}a^4/a^{29}$.

Aufgabe 59:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen im Punkt x_0 einen Grenzwert besitzen

$$\frac{5^x - 1}{x}, x_0 = 0; \quad \frac{\log(x) - 1}{x - e}, x_0 = e; \quad \frac{\log_a(x) - 1}{x - a}, x_0 = a;$$
$$\frac{x^x - 1}{x - 1}, x_0 = 1; \quad \frac{\log(x)}{x^{1/100}}, x_0 = \infty.$$

Aufgabe 60:

Sei f die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^3$ auf $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob die Funktionen $x \mapsto f\left(x^2 \sin(x)\right)$ und $x \mapsto f\left(x^2 \sin(x)\right)/x$ in $x = 0$ einen Grenzwert besitzen. Berechnen Sie auch die zugehörigen einseitigen Grenzwerte. Überprüfen Sie die erhaltenen Ergebnisse, indem Sie beide Funktionen über $[-3\pi, 3\pi]$ plotten lassen.

Aufgabe 61:

Plotten Sie die Graphen der Funktionen $x \mapsto a^x$ für $a = 1/4, 1/3, 2$ und e in den Farben grün, rot, blau und gelb über dem Intervall $[-2, 2]$.

Übungen: Montag, 14–16 Uhr, Mittwoch 14–16, 16–18 Uhr im CIP-Pool
Aktuelle Informationen zu dieser Lehrveranstaltung gibt es online unter
`www.am.uni-duesseldorf.de/~marlis/maple`