

## Numerik I – 12. Übungsblatt

### Aufgabe 23:

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung  $\Sigma = U^T A V$  mit orthogonalen Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und  $V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (b) Berechnen Sie die Lösung des Minimierungsproblems  $\|Ax - b\| = \min!$  für  $b = (1, 1, 1)^T$ .

### Aufgabe 24:

Gegeben sei das quadratische Tikhonov-Funktional

$$T_\alpha(x) = \|Ax - b\|_2^2 + \alpha \|x\|_2^2, \quad \alpha > 0.$$

Zeigen Sie, dass es für jedes  $\alpha > 0$  ein eindeutig bestimmtes  $x_\alpha$  gibt, für das  $T_\alpha(x_\alpha) \leq T_\alpha(x)$  für alle  $x \in \mathbb{C}^n$  gilt. Dieses  $x_\alpha$  ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(A^H A + \alpha I)x = A^H b$$

und für  $\alpha \rightarrow 0$  gilt  $x_\alpha \rightarrow A^+ b$ .