

Numerik I – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Es sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Zu dem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei die folgende Iterationsvorschrift definiert:

$$x_n = x_{n-1}(2 - ax_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

(a) Zeigen Sie:

$$\left|x_n - \frac{1}{a}\right| = a \left|x_{n-1} - \frac{1}{a}\right|^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

(b) Zeigen Sie:

$$\left|x_n - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{a} |ax_0 - 1|^{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(c) Für welche x_0 konvergiert die Folge $\{x_n\}$? Was ist ihr Grenzwert?

(d) Zeigen Sie die a-posteriori-Ungleichung:

$$\left|x_n - \frac{1}{a}\right| \leq \frac{|x_n - x_{n-1}|^2}{ax_{n-1}^2}$$

(e) Berechnen Sie zu $a = 3$ und $x_0 = \frac{1}{2}$ die Näherungen x_1, x_2 und schätzen ihren Fehler ab. Wie groß ist $|x_5 - \frac{1}{3}|$ höchstens?

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie für Aufgabe 1 einen Startwert $x_0 = f(a)$ mit einer linearen Funktion $f(a) = c + da$ so, dass

$$|af(a) - 1| \quad \text{minimal ist für } a \in [1, 2].$$

Mit wieviel Iterationen erreicht der Algorithmus hiermit eine Näherung zu $\frac{1}{a}$ mit einfacher ($|x_n - \frac{1}{a}| \leq 10^{-7}$) bzw. doppelter ($|x_n - \frac{1}{a}| \leq 10^{-16}$) Genauigkeit?

Besprechung in den Übungen am 28.10.2002, 15.00 Uhr in 25.22.02.81
(Freiwillige) Abgabe vor den Übungen