Mathematisches Institut
Prof. Dr. Kristian Witsch

13.06.2002

Einführung in die Numerik – 6. Übungsblatt

Aufgabe 14:

Falls die Werte der Ableitungen an den Randpunkten nicht bekannt sind, verwendet man bei der Spline-Interpolation häufig die "not-a-knot"-Bedingungen

$$s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1), \qquad s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1}),$$

die besagen, dass der Spline auf den Teilintervallen $[x_0, x_2]$ und $[x_{n-2}, x_n]$ durch je ein einziges kubisches Polynom gegeben ist.

Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ das Gleichungssystem für den interpolierenden kubischen Spline mit "not-a-knot"-Bedingungen auf. Zeigen Sie, dass es stets eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Mit der "not-a-knot"-Bedingung kann man v_0 in $s_1''(x_1) = s_2''(x_1)$ bzw. v_n in $s_{n-1}''(x_{n-1}) = s_n''(x_{n-1})$ eliminieren. So erhält man ein System, das die gleiche Abschätzung ermöglicht wie beim eingespannten Spline.

Aufgabe 15:

Sei $f \in C^4([a, b])$ und sei dazu s der eingespannte interpolierende Spline zu einer äquidistanten Unterteilung des Intervalls. Zeigen Sie: Für die zweite Ableitung gilt in den Stützstellen

$$|f''(x_i) - s''(x_i)| \leq \frac{1}{3}\, h^2 \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Integraldarstellung des Restglieds bei der Taylorentwicklung.

Aufgabe 16:

Geben Sie ein schnelles Verfahren zur Berechnung der reellen Cosinus-Transformation (Entwicklung nach T-Polynomen) an.

Besprechung in den Übungen am 20.6.2002.