Mathematisches Institut
Prof. Dr. Kristian Witsch

06.06.2002

Einführung in die Numerik – 5. Übungsblatt

Aufgabe 12:

Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + ... + c_n T_n(x).$$

Falls

$$\begin{aligned} d_k &= c_k + 2x d_{k+1} - d_{k+2} \qquad (k = n, n-1, ..., 0), \quad d_{n+1} = d_{n+2} = 0, \\ e_k &= d_k + 2x e_{k+1} - e_{k+2} \qquad (k = n, n-1, ..., 0), \quad e_{n+1} = e_{n+2} = 0, \end{aligned}$$

dann gilt $p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2)$. Zeigen Sie, dass $p'(x) = e_1 - e_3$ gilt.
Hinweis: Es gibt einen einfachen Zusammenhang zwischen d_k' und e_{k+1}.

Aufgabe 13:

Sei f 2π-periodisch mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$. Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel ergibt

$$\hat{f}_N(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-i\cdot n\cdot t_j} \quad \text{mit} \quad t_j = \frac{2j+1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie:

$$\hat{f}_N(n) = \frac{1}{N}\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \hat{f}(n+lN).$$

Programmieraufgabe 4 : (Schnelle Fouriertransformation)

(a) Schreiben Sie eine rekursive Funktion `y = fftrec(x)`, so dass der Aufruf `y = fftrec(x)` die diskrete Fouriertransformation von x mit Hilfe des rekursiven Algorithmus aus der Vorlesung liefert, wenn x ein Vektor der Länge $N = 2^L$ ist.

(b) Erweitern Sie dann die Funktion um ein zweites Eingabeargument: `y = fftrec(x,omega)`, mit dem Sie den schon berechneten Vektor $[\omega_N^0, \ldots, \omega_N^{N/2-1}]$, $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ übergeben.

(c) Geben Sie die Anzahl der Operationen dividiert durch $N\log_2 N$ aus.

(d) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten für

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & 0 \le x \le \pi \\ -(x-\pi)(2\pi - x) & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

und überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: Es genügt, einmal ω_N^k für $k = 0, \ldots, N/2-1$ zu berechnen, denn $\omega_{N/2}^k = \omega_N^{2k}$.

Besprechung in den Übungen am 13.6.2002. Bearbeitungszeit für die Programmieraufgabe: 3 Wochen