Mathematisches Institut
Prof. Dr. Kristian Witsch

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

16.05.2002

Einführung in die Numerik – 3. Übungsblatt

Aufgabe 6: (Formel von Rodrigues)

Zeigen Sie: Die bezüglich der Gewichtsfunktion ω auf dem Intervall (a,b) orthogonalen Polynome ϕ_k erfüllen

$$\phi_k(x) = C_k \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^k}{dx^k} [\omega(x)(x-a)^k(b-x)^k], \quad C_k \in \mathbb{R},$$

falls die rechte Seite ein Polynom vom Grad k ist.

Hinweis: Weisen Sie nach, dass das wie oben definierte Polynom orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$ ist. Verwenden Sie dazu partielle Integration.

Aufgabe 7:

Die Legendre–Polynome P_k sind durch die Bedingung $P_k(1) = 1$ normiert.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 6

$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} \frac{d^k}{dx^k} [(1-x^2)^k].$$

(b) Zeigen Sie für die Legendre–Polynome die Rekursion

$$P_{k+1}(x) - \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) = -\frac{k}{k+1} P_{k-1}(x).$$

(c) Zeigen Sie, dass für die normierten Orthogonalpolynome ϕ_k (also $P_k = \delta_k \phi_k$ mit $\langle \phi_k, \phi_k \rangle = 1$) gilt

$$\gamma_{k+1}\phi_{k+1}(x) = x\phi_k(x) - \gamma_k \phi_{k-1}(x), \qquad k = 1, 2, ..., \qquad \gamma_k = \frac{k}{\sqrt{4k^2-1}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Rekursion aus (b).

Aufgabe 8:

Radau- und Lobattoquadraturformeln sind diejenigen Quadraturformeln, die bei Vorgabe eines Knotens $c_1 = 0$ bzw. zweier Knoten $c_1 = 0$ und $c_s = 1$ maximale Ordnung haben.

(a) Wie groß ist die maximale Ordnung dieser Quadraturformeln?

(b) Zeigen Sie, dass die durch die übrigen Knoten definierten Knotenpolynome Orthogonalpolynome bezüglich geeigneter gewichteter L^2-Skalarprodukte sind und geben Sie diese Skalarprodukte an.

Besprechung in den Übungen am 23.05.2002, 12:45 Uhr in 25.22.00.81
(Freiwillige) Abgabe vor den Übungen

Programmieraufgabe 2 :

Schreiben Sie eine Funktion, die zu gegebenen Knoten $c_j \quad (j = 1, ..., s)$ und gegebenen Werten eines linearen Funktionals auf den Monomen $I(x^k) \quad (k = 0, ..., s-1)$ die Gewichte $b_j \quad (j = 1, ..., s)$ der Näherungsformel so bestimmt, dass $A(f) = I(f)$ für $f = x^k \quad (k = 0, ..., s-1)$ gilt („Ordnung s").

Ermitteln Sie, wie groß die maximale „Ordnung" ist.

Testen Sie Ihr Programm anhand

(a) der Newton-Cotes-Formeln mit 2-11 Stützstellen auf $[0, 1]$,

(b) der Gaußquadratur mit 3 Stützstellen auf $[0, 1]$,

(c) $I(f) = f'(\frac{1}{2})$ mit 3 Stützstellen $0, \frac{1}{2}, 1$ und

(d) $I(f) = f''(\frac{1}{2})$ mit 3 bis 5 äquidistanten Stützstellen auf $[0, 1]$.

Hinweis: Benutzen Sie die Vandermonde-Matrix $V = (v_{ij})_{i,j=1}^{s}$, $v_{ij} = c_j^{i-1}$. Ein Gleichungssystem der Form $Vb = r$ können Sie in Matlab durch $b = V \setminus r$ lösen.

Bearbeitungszeit für die Programmieraufgabe bis zum 03.Juni.