

Einführung in die Numerik – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Es sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Zu dem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei die folgende Iterationsvorschrift definiert:

$$x_n = x_{n-1}(2 - ax_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

(a) Zeigen Sie:

$$\left|x_n - \frac{1}{a}\right| = a \left|x_{n-1} - \frac{1}{a}\right|^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

(b) Zeigen Sie die a-priori-Abschätzung:

$$\left|x_n - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{a} |ax_0 - 1|^{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(c) Für welche x_0 konvergiert die Folge $\{x_n\}$? Was ist ihr Grenzwert?

(d) Zeigen Sie die a-posteriori-Ungleichung:

$$\left|x_n - \frac{1}{a}\right| \leq \frac{|x_n - x_{n-1}|^2}{ax_{n-1}^2}$$

(e) Berechnen Sie zu $a = 3$ und $x_0 = \frac{1}{2}$ die Näherungen x_1, x_2 und schätzen ihren Fehler ab. Wie groß ist $|x_5 - \frac{1}{3}|$ höchstens?

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie für Aufgabe 1 einen Startwert $x_0 = f(a)$ mit einer linearen Funktion $f(a) = c + da$ so, dass

$$|af(a) - 1| \quad \text{minimal ist für } a \in [1, 2].$$

Mit wieviel Iterationen erreicht der Algorithmus hiermit eine Näherung zu $\frac{1}{a}$ mit einfacher ($|x_n - \frac{1}{a}| \leq 10^{-7}$) bzw. doppelter ($|x_n - \frac{1}{a}| \leq 10^{-16}$) Genauigkeit?

Besprechung in den Übungen am 30.4.2002, 14.15 Uhr in 25.22.02.81
(Freiwillige) Abgabe vor den Übungen

Programmieraufgabe 1 : (Trapez- und Simpsonregel)

Schreiben Sie Funktionen, die für eine gegebene Funktion f , Grenzen a, b und eine vorgegebene Anzahl von Teilintervallen gleicher Länge das Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

mit der Trapezregel und der Simpsonregel näherungsweise berechnen. Als Eingabeparameter sollen die Funktion f , die Grenzen a, b und die Anzahl der Teilintervalle übergeben werden. Implementieren Sie die Verfahren so, dass Sie mit minimaler Anzahl von Funktionsauswertungen auskommen (Funktionswerte an den Grenzen benachbarter Teilintervalle sollen nicht mehrfach berechnet werden).

Testen Sie diese Funktionen am Integral $\int_0^3 \cos x e^{\sin x} dx$. Schreiben Sie dazu eine weitere Funktion zur Auswertung von $f(x) = \cos x e^{\sin x}$ und ein Script (Hauptprogramm), welches die Funktionen für $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ Teilintervalle gleicher Länge aufruft.

Was ist der exakte Wert des Integrals? Untersuchen Sie für die genannten Verfahren die Abhängigkeit des Fehlers von $h = 3/N$.

Tragen Sie den Logarithmus des Fehlers als Funktion von $\log(h)$ auf. Es ergeben sich die Fehlerkurven der Verfahren annähernd als Geraden der Steigungen 2 und 4. Warum?

Bearbeitungszeit für die Programmieraufgabe bis zum 13.Mai.