

Übungen zu Mathematik für Biologen

Aufgabe 24: Aus einer Urne mit zwei schwarzen und drei roten Kugeln werde fünfmal ohne Zurücklegen gezogen. Betrachten Sie die Zufallsvariable $X =$ "Nummer des Zuges, in dem zum ersten Mal insgesamt mehr rote als schwarze Kugeln gezogen worden sind".

- Bestimmen Sie die Verteilung von X .
- Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.
- Berechnen Sie $E((X - 1)^2)$ und $E((X + 1)^2)$.

Aufgabe 25: Bei einem Würfelspiel wird ein fairer Würfel einmal geworfen. Spieler 1 erhält die gewürfelte Zahl als Punktzahl. Spieler 2 erhält als Punktzahl die Hälfte der gewürfelten Zahl, wenn eine gerade Augenzahl fällt, und das doppelte der gewürfelten Zahl, wenn eine ungerade Augenzahl fällt. Die Zufallsvariable X_i bezeichne die Punktzahl von Spieler i , $i = 1, 2$.

- Berechnen Sie $E(X_1)$, $E(2X_2 + 3)$ und $E((X_1 + X_2)/2)$.
- Berechnen Sie $Var(X_1)$ und $Var(2X_2 + 3)$.
- Berechnen Sie $Cov(X_1, X_2)$ und $Var((X_1 + X_2)/2)$.

Aufgabe 26: Der Weihnachtsmann macht sich auf den Weg nach Düsseldorf zur Verteilung von Weihnachtsgeschenken. 400 Studierende kommen zur zentralen Geschenkausgabe in Hörsaal 3A. Ob jemand ein Geschenk erhält, entscheidet der Weihnachtsmann jeweils unabhängig, indem er bei einem seiner 400 Rentiere überprüft, ob es gerade nach links oder nach rechts schaut. Es bezeichne X_i die Zufallsvariable

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls der } i\text{-te Student ein Geschenk erhält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $P(X_i = 1) = 0.5$ für $1 \leq i \leq 400$. $X := \sum_{i=1}^{400} X_i$ bezeichne die Anzahl der Studierenden, die den Hörsaal glücklich mit einem Geschenk wieder verlassen.

- Bestimmen Sie die Verteilung von X , und berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.
- Berechnen Sie eine untere Schranke für $P(\{180 < X < 220\})$ mit Hilfe der Tschebyscheffchen Ungleichung.
- Berechnen Sie $P(\{180 < X < 220\})$ näherungsweise durch die Normalapproximation (ohne Stetigkeitskorrektur), indem Sie die Vertafelung der Standardnormalverteilung (vgl. Blatt7) benutzen.

Abgabe: 08.01.2002, 13.00 Uhr, in den Übungsbriefkästen

Beiblätter zur Vorlesung Mathematik für Biologen

Varianz und Kovarianz

Die Varianz $Var(X)$ einer reellen Zufallsvariable X ist definiert durch

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Für zwei Zufallsvariablen X und Y ist die Kovarianz $Cov(X, Y)$ definiert durch

$$Cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Der Quotient $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$ heißt der Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen X und Y .

Gilt $Cov(X, Y) = 0$, also auch $\rho_{X,Y} = 0$, so heißen die beiden Zufallsvariablen unkorreliert. Sind X und Y unabhängig, dann sind sie unkorreliert.

Rechenregeln für die Varianz

Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$Var(X + a) = Var(X).$$

Für $c \in \mathbb{R}$ ist

$$Var(cX) = c^2 Var(X).$$

Für die Varianz einer Summe von zwei Zufallsvariablen X, Y gilt:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 Cov(X, Y).$$

Sind X und Y unkorrelierte Zufallsvariable, d.h. ist $Cov(X, Y) = 0$, so folgt

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Sind X_1, X_2, \dots, X_n paarweise unkorrelierte Zufallsvariable (d.h. gilt $Cov(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$), so ist

$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) \quad \text{und} \quad Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i).$$