Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. F. Jarre / Dr. S. Henn

WS 01/02
12.12.2001
Blatt 8

Übungen zu Mathematik für Biologen

Bearbeiten Sie **Aufgabe 20** und **Aufgabe 21** von **Blatt 7**.

Aufgabe 22: Aus einer Urne mit zwei schwarzen und drei roten Kugeln werde fünfmal ohne Zurücklegen gezogen. Betrachten Sie die Zufallsvariable $X =$“Nummer des Zuges, in dem zum ersten Mal insgesamt mehr rote als schwarze Kugeln gezogen worden sind”.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von X.
b) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.
c) Berechnen Sie $E((X-1)^2)$ und $E((X+1)^2)$.

Aufgabe 23: Bei einer Tombola werden 1000 Lose verkauft und folgende Gewinne verlost (die Ziehung dieser Gewinne erfolgt ohne Zurücklegen der gezogenen Gewinn-Lose, d.h. auf ein Los kann höchstens ein Gewinn fallen):

1 Gewinn	à	100 DM
10 Gewinne	à	10 DM
10 Gewinne	à	5 DM

Die restlichen Lose sind Nieten. Es bezeichne X die Höhe des Gewinnes, die auf ein gekauftes Los entfällt.

a) Man berechne die Verteilung der Zufallsvariablen X.
b) Man berechne $E(X)$, $E(X^2)$ und $Var(X) := E(X^2) - E(X)^2$.
c) Wie hoch müsste man den Preis pro Los festlegen, wenn man nur genau 50% der Einnahmen beim Losverkauf für die Bereitstellung der zu verlosenden Gewinne zu verwenden gedenkt?
d) Man berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass man mit einem Los 100 DM gewinnt (10 DM, 5 DM) unter der Annahme, dass man keine Niete gezogen hat.

Abgabe: 18.12.2001, 13.00 Uhr, in den Übungsbriefkästen

<u>Beiblätter zur Vorlesung Mathematik für Biologen</u>

Erwartungswert:

Sei X eine reelle Zufallsvariable. Der <u>Erwartungswert</u> von X ist

$$E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, P(\{\omega\}),$$

falls Ω abzählbar ist.

Ist X eine diskret verteilte ZV (d.h. es existiert eine Folge $(x_i)_{i\in I\!N}$ von Punkten in $I\!R$ mit $P(X = x_i) = p_i$ für $i \in I\!N$, wobei $0 \le p_i \le 1$ und $\sum_{i\in I\!N} p_i = 1$ ist), so ist der Erwartungswert gegeben durch

$$E(X) = \sum_{i\in I\!N} x_i\, P(X = x_i) = \sum_{i\in I\!N} x_i\, p_i.$$

Für $\varphi : I\!R \to I\!R$ ist dann $E(\varphi \circ X) = \sum_{i\in I\!N} \varphi(x_i)\, p_i$.

Ist X absolutstetig verteilt mit Dichtefunktion f (d.h. es ist $P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ für alle $a \in I\!R$), so ist

$$E(X) = \int x f(x)\, dx.$$

Für $\varphi : I\!R \to I\!R$ ist dann $E(\varphi \circ X) = \int \varphi(x) f(x)\, dx$.

<u>Rechenregeln für den Erwartungswert</u>

Für $c \in I\!R$ ist $E(cX) = cE(X)$.
Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ ist

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Für das arithmetische Mittel gilt somit

$$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Für unabhängige Zufallsvariable X und Y ist $E(XY) = E(X)\,E(Y)$.