Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. F. Jarre / Dr. S. Henn

WS 01/02
16.01.2002
Blatt 11

Übungen zu Mathematik für Biologen

Aufgabe 29: Bei einer Messreihe haben sich folgende 12 Messwerte ergeben:

11.24	6.12	8.94	6.57	11.55	9.99	7.62	9.32	9.54	11.36	13.25	9.86

Nehmen Sie an, dass die Messwerte x_i Realisierungen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen X_i mit unbekanntem Erwartungswert $E(X_i) = \mu$ und unbekannter Varianz $Var(X_i) = \sigma^2$ sind. Schätzen Sie die beiden Parameter μ und σ^2.

Aufgabe 30: (Würfeln und Warten auf die erste 6): Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig und geometrisch verteilt, d.h.

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, ..., X_n = k_n) = \prod_{i=1}^{n} ((1-p)^{k_i - 1} p).$$

Seien $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$ gegeben. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für p.

Aufgabe 31: Beim Schwarzfahren mit der Bahn werde man mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p erwischt. Nun sitzen drei ertappte Schwarzfahrer nach der Kontrolle zusammen und erzählen sich, dass sie vorher bereits 4, 8 bzw. 15 mal unbestraft ohne Fahrschein gefahren sind.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis in Abhängigkeit von p.

b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für p unter diesen Beobachtungen.

Abgabe: 22.01.2002, 13.00 Uhr, in den Übungsbriefkästen

Beiblätter zur Vorlesung Mathematik für Biologen

Maximum-Likelihood-Schätzer (M-L-S)(diskreter Fall)

Sei X eine diskret verteilte ZV, deren Verteilung durch eine Zähldichte p_ϑ mit $\vartheta \in \Theta$ gegeben ist.
(D.h., es ist $0 \leq p_\vartheta(x)$, $\sum_x p_\vartheta(x) = 1$ und $P(X = x) = p_\vartheta(x)$ für jedes x.)
Häufig ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit unabhängigen ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$, deren Verteilung jeweils ein Zähldichte $p_\vartheta^{(1)}, p_\vartheta^{(2)}, \ldots, p_\vartheta^{(n)}$ besitzen; in diesem Fall ist die Zähldichte für X gegeben durch

$$p_\vartheta(x) = \prod_{i=1}^{n} p_\vartheta^{(i)}(x_i)$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
Ist x eine Realisierung der ZV X, so heisst

$$g(\vartheta) := L_x(\vartheta) := p_\vartheta(x)$$

die zugehörige **Likelihoodfunktion**.

Als **M-L-Schätzwert** für den unbekannten Parameter ϑ zur Beobachtung x bezeichnet man denjenigen Parameter $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(x)$, für den

$$p_{\hat{\vartheta}}(x) \stackrel{!}{=} \max_{\vartheta \in \Theta} p_\vartheta(x)$$

gilt.

Maximum-Likelihood-Schätzer (M-L-S) (kontinuierlicher Fall)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte reelle ZV, deren Verteilung durch eine Dichtefunktion f_ϑ mit $\vartheta \in \Theta$ gegeben ist.
(D.h., es ist $0 \leq f_\vartheta$, $\int_{-\infty}^{\infty} f_\vartheta(x)dx = 1$, und für $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist

$$P(X_1 \leq a_1, X_2 \leq a_2, \ldots, X_n \leq a_n) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{a_i} f_\vartheta(x_i)dx_i \quad .)$$

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Realisierungen der ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$, so heisst

$$g(\vartheta) := L_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\vartheta) := f_\vartheta(x_1) \cdot f_\vartheta(x_2) \cdot \ldots \cdot f_\vartheta(x_n)$$

die zugehörige **Likelihoodfunktion**.

Als **M-L-Schätzwert** für den unbekannten Parameter ϑ zur Beobachtung $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet man denjenigen Parameter $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, für den

$$\prod_{i=1}^{n} f_{\hat{\vartheta}}(x_i) \stackrel{!}{=} \max_{\vartheta \in \Theta} \prod_{i=1}^{n} f_\vartheta(x_i)$$

gilt.