

## Übungen zu Mathematik für Biologen

**Aufgabe 27:** Die Macht entschlossener Minderheiten:

An einer Wahl zwischen den Kandidaten A und B nehmen 200000 Wähler teil. 1000 Wähler unterwerfen sich der Parteidisziplin und stimmen geschlossen für Kandidat A. Die übrigen 199000 Wähler sind mehr oder weniger unentschlossen und treffen ihre Entscheidung unabhängig voneinander durch Werfen einer Münze. Bestimmen Sie mittels des zentralen Grenzwertsatzes approximativ die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg von Kandidat A.

**Aufgabe 28:** Wenn eine Zelle einer bestimmten Art radioaktiver Strahlung ausgesetzt wird,

- stirbt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/3$ ,
- überlebt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/2$ ,
- teilt sie sich mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/6$ .

Es werden 3600 Zellen bestrahlt, von denen wir annehmen, dass sie unabhängig voneinander reagieren.

$X_i$  sei die Zufallsvariable, die angibt, wieviele Zellen aus der Bestrahlung der  $i$ -ten Zelle hervorgehen (d.h.  $X_i = 0$ , falls die  $i$ -te Zelle stirbt;  $X_i = 1$ , falls sie überlebt;  $X_i = 2$ , falls sie sich teilt).  $Y$  bezeichne die Zufallsvariable, die angibt, wieviele Zellen nach der Bestrahlung aller 3600 Zellen leben, d.h.  $Y = \sum_{i=1}^{3600} X_i$ .

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable  $Y$ .
- b) Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass nach der Bestrahlung höchstens 2800 oder mindestens 3200 lebende Zellen vorhanden sind.

**Abgabe:** 15.01.2002, 13.00 Uhr, in den Übungsbriefkästen

## Beiblätter zur Vorlesung Mathematik für Biologen

### Normalapproximation

1.) Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig identisch verteilte reelle Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\mu = E(X_i)$  und Varianz  $\sigma^2 = \text{Var}(X_i) > 0$ .

(a) Es gilt die Normalapproximation:

$$P\left(a < \sum_{i=1}^n X_i \leq b\right) \approx \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

(Dabei bedeutet  $\approx$  "ungefähr gleich".)

(b) Nehmen die  $X_i$  nur ganze Zahlen als Werte an, so erhält man für  $a, b \in \mathbb{Z}$  meist eine bessere Näherung durch die Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur:

$$\begin{aligned} P\left(a \leq \sum_{i=1}^n X_i \leq b\right) &= P\left(a - \frac{1}{2} < \sum_{i=1}^n X_i \leq b + \frac{1}{2}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp(-x^2/2) dx \quad \text{für } a \in \mathbb{R},$$

und es gilt:  $\Phi(a) + \Phi(-a) = 1$ .

2.) Für großes  $n$  gilt näherungsweise

$$\begin{aligned} P\left(|\bar{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &\geq \frac{2}{3} \\ P\left(|\bar{X}_n - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) &\geq 0.95 \\ P\left(|\bar{X}_n - \mu| \leq \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right) &\geq 0.99, \end{aligned}$$

wobei  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  ist.