Beiblätter zur Vorlesung Mathematik für Biologen

Praktische Anweisungen zur Testtheorie

1) Aufstellen des wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells für ein Zufallsexperiment, in dem unbekannte Parameter auftreten.

2) Formulieren einer Hypothese H_0 und der Gegenhypothese H_1, auch Alternative genannt (über die unbekannten Parameter), Festlegen eines Signifikanzniveaus α. Ziel: "Absicherung" der Gegenhypothese H_1 zum Niveau α.

3) Festlegen des Entscheidungsverfahrens (=Tests) für das Test-Problem (so, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art $\leq \alpha$ ist und die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art klein wird).

4) Durchführen des Zufallsexperimentes, Entscheidungs-Findung gemäß 3) mit den ermittelten Daten.

5) Interpretation: Gelangt man zur Entscheidung für H_1, so hat man H_1 signifikant zum Niveau α nachgewiesen. Man sagt auch: "die Hypothese H_0 wird verworfen". Dagegen liefert eine Entscheidung für H_0 kein brauchbares Ergebnis. Man sagt höchstens: "H_0 kann zum vorliegenden Niveau α nicht verworfen werden". Damit ist <u>keinesfalls</u> H_0 abgesichert.

6) Man beachte: Ergebnisse eines Zufallsexperimentes dürfen nur für ein Test-Problem und nicht mehrfach für eine ganze Folge von Testproblemen verwendet werden, da sich sonst Irrtumswahrscheinlichkeiten addieren und man das Niveau nicht hält.

Binomialtests für den Erwartungswert binomialverteilter Zufallsvariablen

Situation: Gegeben sind unabhängige $B(1,p)$-verteilte ZV $X_1,\ldots,X_n$ mit unbekanntem Parameter $p \in]0,1[$. Ferner sei $p_0 \in]0,1[$ und $\alpha \in]0,1[$ vorgegeben. Die Werte $x_1,\ldots,x_n$ seien Realisierungen der ZV $X_1,\ldots,X_n$.

1) Testproblem: $H_0 : p \le p_0$ gegen $H_1 : p > p_0$.
Testverfahren: Einseitiger (oberer) Binomialtest zum Niveau α:

$$d(x_1,\ldots,x_n) := \begin{cases} d_{H_1} & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i > c \\ d_{H_0} & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i \le c \end{cases}$$

Die Konstante c ist dabei so zu wählen, dass gilt:

$$\alpha_0 := \sum_{k=c+1}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha \quad \text{und} \quad \sum_{k=c}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} > \alpha$$

2) Testproblem: $H_0 : p \ge p_0$ gegen $H_1 : p < p_0$.
Testverfahren: Einseitiger (unterer) Binomialtest zum Niveau α:

$$d(x_1,\ldots,x_n) := \begin{cases} d_{H_1} & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i < c \\ d_{H_0} & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i \ge c \end{cases}$$

Die Konstante c ist dabei so zu wählen, dass gilt:

$$\alpha_0 := \sum_{k=0}^{c-1} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} > \alpha$$

3) Testproblem: $H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p \ne p_0$.
Testverfahren: Zweiseitiger $\alpha/2-\alpha/2$-Binomialtest zum Niveau α :

$$d(x_1,\ldots,x_n) := \begin{cases} d_{H_1} & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i \; < c_1 \text{ oder } > c_2 \\ d_{H_0} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Konstanten c_1 und c_2 sind dabei so zu wählen, dass gilt:

$$\sum_{k=0}^{c_1-1} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha/2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{c_1} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} > \alpha/2$$
$$\sum_{k=c_2+1}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha/2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=c_2}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} > \alpha/2$$

Hierbei setzt man

$$\alpha_0 := \sum_{k=0}^{c_1-1} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} + \sum_{k=c_2+1}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k}.$$

α_0 heisst in allen 3 Fällen die effektive Irrtumswahrscheinlichkeit.

Gaußtests für den Erwartungswert normalverteilter Zufallsvariablen

Situation: Gegeben sind unabhängige $N(\mu, \sigma_0^2)$-verteilte ZV $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekanntem Parameter $\mu \in I\!R$ und bekanntem $\sigma_0^2 > 0$. Ferner sei $\mu_0 \in I\!R$ und $\alpha \in]0,1[$ vorgegeben. Die Werte $x_1, \ldots, x_n$ seien Realisierungen der ZV $X_1, \ldots, X_n$.

1) Testproblem: $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$.
   Testverfahren: Einseitiger (oberer) Gaußtest zum Niveau α:

$$d(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} d_{H_1} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma_0} > u_{1-\alpha} \\ d_{H_0} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma_0} \leq u_{1-\alpha} \end{cases}$$

2) Testproblem: $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$.
   Testverfahren: Einseitiger (unterer) Gaußtest zum Niveau α:

$$d(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} d_{H_1} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma_0} < -u_{1-\alpha} \\ d_{H_0} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma_0} \geq -u_{1-\alpha} \end{cases}$$

3) Testproblem: $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
   Testverfahren: Zweiseitiger Gaußtest zum Niveau α :

$$d(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} d_{H_1} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}|\bar{x}_n - \mu_0|}{\sigma_0} > u_{1-\alpha/2} \\ d_{H_0} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}|\bar{x}_n - \mu_0|}{\sigma_0} \leq u_{1-\alpha/2} \end{cases}$$

Dabei ist $\bar{x}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, und $u_{1-\alpha}$ ist das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormal-Verteilung, d.h. $\Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

Student'sche t-Tests für den Erwartungswert normalverteilter Zufallsvariablen

Situation: Gegeben sind unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte ZV $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekannten Parametern $\mu \in I\!R$ und $\sigma^2 > 0$. Ferner sei $\mu_0 \in I\!R$ und $\alpha \in]0,1[$ vorgegeben. Die Werte $x_1, \ldots, x_n$ seien Realisierungen der ZV $X_1, \ldots, X_n$.

1) Testproblem: $H_0 : \mu \le \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$.
   Testverfahren: <u>Einseitiger (oberer) t-Test</u> zum Niveau α:

$$d(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} d_{H_1} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sqrt{s_n^2}} > t_{n-1,1-\alpha} \\ d_{H_0} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sqrt{s_n^2}} \le t_{n-1,1-\alpha} \end{cases}$$

2) Testproblem: $H_0 : \mu \ge \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$.
   Testverfahren: <u>Einseitiger (unterer) t-Test</u> zum Niveau α:

$$d(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} d_{H_1} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sqrt{s_n^2}} < -t_{n-1,1-\alpha} \\ d_{H_0} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sqrt{s_n^2}} \ge -t_{n-1,1-\alpha} \end{cases}$$

3) Testproblem: $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \ne \mu_0$.
   Testverfahren: <u>Zweiseitiger t-Test</u> zum Niveau α :

$$d(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} d_{H_1} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}|\bar{x}_n - \mu_0|}{\sqrt{s_n^2}} > t_{n-1,1-\alpha/2} \\ d_{H_0} & \text{falls } \dfrac{\sqrt{n}|\bar{x}_n - \mu_0|}{\sqrt{s_n^2}} \le t_{n-1,1-\alpha/2} \end{cases}$$

Dabei ist $\bar{x}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $s_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$ und $t_{n-1,1-\alpha}$ ist das $(1-\alpha)$-Quantil einer t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden.

Zweistichprobentests

1) Zweistichproben-Gaußtest

Situation: Gegeben sind unabhängige ZV $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$, wobei die X_i $N(\mu, \sigma_0^2)$-verteilt sind ($i = 1, \ldots, m$) und die Y_j $N(\nu, \sigma_0^2)$-verteilt ($j = 1, \ldots, n$) mit unbekannten Parametern μ, ν und bekanntem σ_0^2. Ferner sei $\alpha \in]0, 1[$ vorgegeben. Die Werte $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ seien Realisierungen der ZV $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$.

Testproblem: $H_0 : \mu \leq \nu$ gegen $H_1 : \mu > \nu$.
Testverfahren: Einseitiger (oberer) Zweistichproben-Gaußtest zum Niveau α:

$$d\binom{x_1, \ldots, x_m}{y_1, \ldots, y_n} := \begin{cases} d_{H_1} & \\ & \text{falls } \dfrac{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}(\bar{x}_m - \bar{y}_n)}{\sigma_0} \quad \begin{matrix} > u_{1-\alpha} \\ \\ \leq u_{1-\alpha} \end{matrix} \\ d_{H_0} & \end{cases}$$

Analog sind der "untere einseitige Zweistichproben-Gaußtest" für das Testproblem $H_0 : \mu \geq \nu$ gegen $H_1 : \mu < \nu$ sowie der "zweiseitige Zweistichproben-Gaußtest" für das Testproblem $H_0 : \mu = \nu$ gegen $H_1 : \mu \neq \nu$ definiert.

2) Zweistichproben-t-Test

Situation: Gegeben sind unabhängige ZV $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$, wobei die X_i $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt sind ($i = 1, \ldots, m$) und die Y_j $N(\nu, \sigma^2)$-verteilt ($j = 1, \ldots, n$) mit unbekannten Parametern μ, ν und σ^2. Ferner sei $\alpha \in]0, 1[$ vorgegeben. Die Werte $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ seien Realisierungen der ZV $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$.

Testproblem: $H_0 : \mu \leq \nu$ gegen $H_1 : \mu > \nu$.
Testverfahren: Einseitiger (oberer) Zweistichproben-t-Test zum Niveau α:

$$d\binom{x_1, \ldots, x_m}{y_1, \ldots, y_n} := \begin{cases} d_{H_1} & \\ & \text{falls } \dfrac{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}(\bar{x}_m - \bar{y}_n)}{\sqrt{\frac{1}{m+n-2}((m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2)}} \quad \begin{matrix} > t_{n+m-2,1-\alpha} \\ \\ \leq t_{n+m-2,1-\alpha} \end{matrix} \\ d_{H_0} & \end{cases}$$

Dabei ist $\bar{x}_m := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i$ und $\bar{y}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n y_j$. Ferner ist $s_x^2 := \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_m)^2$ und $s_y^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y}_n)^2$.
Analog sind der "untere einseitige Zweistichproben-t-Test" für das Testproblem $H_0 : \mu \geq \nu$ gegen $H_1 : \mu < \nu$ sowie der "zweiseitige Zweistichproben-t-Test" für das Testproblem $H_0 : \mu = \nu$ gegen $H_1 : \mu \neq \nu$ definiert.

Zweistichproben-Wilcoxontest (Rangsummentest)

Situation: Gegeben sind unabhängige ZV $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$, wobei die X_i identisch verteilt sind mit einer stetigen Verteilungsfunktion F $(i = 1, \ldots, m)$ und die Y_j identisch verteilt sind mit einer stetigen Verteilungsfunktion G $(j = 1, \ldots, n)$. Ferner sei $\alpha \in]0, 1[$ vorgegeben. Die Werte $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ seien Realisierungen von $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, \ldots, Y_n$.

Testproblem:	die Hypothese H_0 :	$F(x) \geq G(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen
	die Alternative H_1 :	$F(x) \leq G(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und
		$F(x) < G(x)$ für mindestens ein $x \in \mathbb{R}$.

Man betrachtet nur die Ränge (Rangzahlen) $r(x_i)$ der Beobachtungen x_i und die Ränge $r(y_j)$ der Beobachtungen y_j innerhalb aller Beobachtungen, wobei

$$\begin{aligned} r(x_i) \quad &:= \quad \text{Anzahl der Werte aus der Menge } \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}, \\ & \quad \text{die kleiner oder gleich dem Wert } x_i \text{ sind} \\ r(y_j) \quad &:= \quad \text{Anzahl der Werte aus der Menge } \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}, \\ & \quad \text{die kleiner oder gleich dem Wert } y_j \text{ sind} \end{aligned}$$

Testverfahren: Oberer Zweistichproben-Wilcoxontest zum Niveau α:

$$d\binom{x_1, \ldots, x_m}{y_1, \ldots, y_n} := \begin{cases} d_{H_1} & \text{falls } \sum_{i=1}^m r(x_i) > c \\ d_{H_0} & \text{falls } \sum_{i=1}^m r(x_i) \leq c \end{cases}$$

Die Konstante c ist dabei so zu wählen, dass unter der Voraussetzung $F = G$

$$P_{m,n}(\sum_{i=1}^m r(X_i) > c) \leq \alpha \quad \text{und} \quad P_{m,n}(\sum_{i=1}^m r(X_i) > c - 1) > \alpha$$

gilt.
Wegen $P_{m,n}(\sum_{i=1}^m r(X_i) \leq c) = W_{m,n}(c) = 1 - P_{m,n}(\sum_{i=1}^m r(X_i) > c)$ lässt sich der kritische Wert c aus der Tabelle der Verteilungsfunktion $W_{m,n}$ aus den Ungleichungen $W_{m,n}(c) \geq 1 - \alpha$ und $W_{m,n}(c - 1) < 1 - \alpha$ bestimmen.

Hinweis: Wenn alle Beobachtungen verschieden sind – und nur diesen Fall brauchen wir hier wegen der Stetigkeitsannahmen über die Verteilungsfunktionen zu betrachten – gilt

$$\sum_{i=1}^m r(x_i) + \sum_{j=1}^n r(y_j) = \sum_{i=1}^{m+n} i = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

Deshalb kann man bei der Formulierung der Testvorschrift auf die Summe der Ränge der y_j verzichten und nur die Summe der Ränge der x_i verwenden. Wenn Beobachtungen mit demselben Wert auftreten, ist ein modifiziertes, hier nicht ausgeführtes Testverfahren anzuwenden.

Rangsummentest

Tabelle der Verteilungsfunktion der Teststatistik unter der Voraussetzung $F = G$

Angegeben sind die Werte von $W_{m,n}(k) := P_{m,n}(\sum_{i=1}^{m} r(X_i) \leq k)$.

k	$m=4, n=4$	$m=4, n=5$	$m=4, n=6$	$m=5, n=5$	$m=5, n=6$	$m=6, n=6$
10	0.0143	0.0079	0.0048			
11	0.0286	0.0159	0.0095			
12	0.0571	0.0317	0.0190			
13	0.1000	0.0556	0.0333			
14	0.1714	0.0952	0.0571			
15	0.2429	0.1429	0.0857	0.0040	0.0022	
16	0.3429	0.2063	0.1286	0.0079	0.0043	
17	0.4429	0.2778	0.1762	0.0159	0.0087	
18	0.5571	0.3651	0.2381	0.0278	0.0152	
19	0.6571	0.4524	0.3048	0.0476	0.0260	
20	0.7571	0.5476	0.3810	0.0754	0.0411	
21	0.8286	0.6349	0.4571	0.1111	0.0628	0.0011
22	0.9000	0.7222	0.5429	0.1548	0.0887	0.0022
23	0.9429	0.7937	0.6190	0.2103	0.1234	0.0043
24	0.9714	0.8571	0.6952	0.2738	0.1645	0.0076
25	0.9857	0.9048	0.7619	0.3452	0.2143	0.0130
26	1.0000	0.9444	0.8238	0.4206	0.2684	0.0206
27		0.9683	0.8714	0.5000	0.3312	0.0325
28		0.9841	0.9143	0.5794	0.3961	0.0465
29		0.9921	0.9429	0.6548	0.4654	0.0660
30		1.0000	0.9667	0.7262	0.5346	0.0898
31			0.9810	0.7897	0.6039	0.1201
32			0.9905	0.8452	0.6688	0.1548
33			0.9952	0.8889	0.7316	0.1970
34			1.0000	0.9246	0.7857	0.2424
35				0.9524	0.8355	0.2944
36				0.9722	0.8766	0.3496
37				0.9841	0.9113	0.4091
38				0.9921	0.9372	0.4686
39				0.9960	0.9589	0.5314
40				1.0000	0.9740	0.5909
41					0.9848	0.6504
42					0.9913	0.7056
43					0.9957	0.7576
44					0.9978	0.8030
45					1.0000	0.8452
46						0.8799
47						0.9102
48						0.9340
49						0.9535
50						0.9675
51						0.9794
52						0.9870
53						0.9924
54						0.9957
55						0.9978
56						0.9989
57						1.0000